

# Kategorielle Langlands-Korrespondenz für die verallgemeinerten Lorentz-Gruppen

IMMANUEL HALUPCZOK

OKTOBER 2004

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau

Dekan: PROF. JOSEF HONERKAMP

1. Referent: PROF. WOLFGANG SOERGEL

2. Referent: PROF. KARI VILONEN

Datum der Promotion: 12. April 2005

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1	Einleitung . . . . .	5
1.1	Ein paar Notationen . . . . .	5
1.2	Die Vermutung aus [Soe01] im Detail . . . . .	5
1.3	Unser Fall . . . . .	7
1.4	Die Harish-Chandra-Moduln zu $\mathrm{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$ . . . . .	8
1.5	Überblick über die geometrische Seite . . . . .	9
1.6	Dank . . . . .	10
Kapitel 2	Konstruktion der Varietät $X$ nach [ABV92] . . . . .	13
2.1	Daten und Notationen zu $\mathrm{SO}_{2n}$ , $\mathrm{SO}_{2n+1}$ und $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	13
2.2	Die reelle Form und die L-Gruppe . . . . .	15
2.3	Die Varietät $X$ , wenn der Charakter $\chi$ trivial ist . . . . .	16
2.4	Berechnung von $y$ . . . . .	18
Kapitel 3	Konstruktion des Hecke-Algebren-Moduls $M_{\text{nütz}}$ . . . . .	21
3.1	Ziel dieses Kapitels . . . . .	21
3.2	Involutionen in ${}^1W \setminus W$ . . . . .	21
3.3	Die Abbildung $\phi$ von den Bahnen in die Involutionen . . . . .	23
3.4	Das Produkt einer Bahn mit $P_s$ sieht aus wie $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . . . . .	24
3.5	Die verschiedenen Möglichkeiten für $K_{\text{St}}$ . . . . .	25
3.6	Die nützlichen Nachbarschaften in $\mathcal{I}$ im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$ . . . . .	28
3.7	Die nützlichen Nachbarschaften in $\mathcal{I}$ im Fall $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	30
3.8	Die nützlichen Bahnen im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$ . . . . .	31
3.9	Die nützlichen Bahnen im Fall $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	32
3.10	Äquivariante lokale Systeme auf $G/B$ . . . . .	33
3.11	Nachbarschaften in der Basis $\mathcal{D}$ . . . . .	34
3.12	Die Operation der Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ . . . . .	36
3.13	Die Basis $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$ im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$ . . . . .	37
3.14	Die Operation von $\mathcal{H}$ auf $M_{\text{nütz}}$ im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$ . . . . .	38
3.15	Die Basis $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$ im Fall $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	40
3.16	Die Operation von $\mathcal{H}$ auf $M_{\text{nütz}}$ im Fall $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	41
3.17	Längen und die Bruhat-Ordnung . . . . .	42
Kapitel 4	Berechnung der intermediären Erweiterungen . . . . .	43
4.1	Die Dualisierungsabbildung $D$ im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$ . . . . .	44
4.2	Die Dualisierungsabbildung $D$ im Fall $\mathrm{SP}_{2n}$ . . . . .	45
4.3	Die neue Basis $(\lambda_\delta)_{\delta \in \mathcal{D}_{\text{nütz}}}$ . . . . .	45
4.4	Folgerungen für die einfachen perversen Garben $\mathcal{L}_k$ . . . . .	46
4.5	Homomorphismen verschwinden . . . . .	47

Kapitel 5	Die Ext-Algebra einer Nachbarschaft . . . . .	51
5.1	Ziel des Kapitels . . . . .	51
5.2	Die Ext-Algebra bei $T_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ . . . . .	53
5.3	Die Ext-Algebra bei $B_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ . . . . .	55
5.4	Endomorphismen hochziehen . . . . .	56
5.5	$K_{\text{St}}^2$ zerfällt . . . . .	59
Kapitel 6	Zusammenbauen . . . . .	61
6.1	Ext-Algebra zusammensetzen im Fall $\text{SO}_{2n}$ . . . . .	62
6.2	Ext-Algebra zusammensetzen im Fall $\text{SP}_{2n}$ . . . . .	64
Literaturverzeichnis	. . . . .	67

## KAPITEL 1

### Einleitung

In [Soe01] wird im Rahmen der Langlands-Philosophie eine Vermutung über die Äquivalenz zweier Kategorien aufgestellt: die Kategorie der Harish-Chandra-Moduln zu einer reellen algebraischen Gruppe und eine „geometrische“ Kategorie. Für den Fall, dass die reelle algebraische Gruppe die verallgemeinerte Lorentz-Gruppe  $SO_{m-1,1}(\mathbb{R})$  ist, wurde die Kategorie der Harish-Chandra-Moduln in [Kho81] explizit als Kategorie von gewissen Moduln einer Köcher-Algebra realisiert. In dieser Arbeit wird die entsprechende Kategorie auf der geometrischen Seite untersucht und so die Vermutung aus [Soe01] für den Fall  $SO_{m-1,1}(\mathbb{R})$  bewiesen.

#### 1.1 Ein paar Notationen

Wir werden für eine komplexe algebraische Gruppe  $G$  meistens statt  $G(\mathbb{C})$  einfach  $G$  für die komplexwertigen Punkte schreiben.

Die Notation „ $G \dashrightarrow X$ “ bedeutet „ $G$  operiert auf  $X$ “. Diese Notation ist auch für kommutative Diagramme geeignet. Außerdem werden wir statt „ $G$ -äquivariante Garben auf  $X$ “ oft einfach „Garben auf  $G \dashrightarrow X$ “ sagen. Übrigens werden alle Garben in dieser Arbeit äquivariant sein.

Wann immer wir von einer derivierten Kategorie sprechen, werden wir immer die nach unten beschränkte derivierte Kategorie  $D^+(\cdot)$  meinen. Wir werden der Einfachheit halber nur  $D(\cdot)$  dafür schreiben.

#### 1.2 Die Vermutung aus [Soe01] im Detail

Wir haben gegeben:

- eine komplexe algebraische Gruppe  $G$ ,
- eine innere Klasse  $F$  von reellen Formen von  $G$ ,
- einen zentralen Charakter  $\chi \in \text{MaxZ}(U(\mathfrak{g}))$  der universellen Einhüllenden der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  zu  $G$ .

Aus diesen Daten werden die beiden Kategorien konstruiert, die laut Vermutung äquivalent sind. Dazu einige Definitionen:

Für eine reelle Form  $\delta: G \rightarrow G$  sei  $G(\mathbb{R}, \delta)$  die zugehörige reelle algebraische Gruppe (bestehend aus den Fixpunkten in  $G(\mathbb{C})$  unter  $\delta$ ). Sei  $\mathcal{M}(G(\mathbb{R}, \delta))$  die Kategorie der Harish-Chandra-Moduln zu  $G(\mathbb{R}, \delta)$  und  $\mathcal{M}(G(\mathbb{R}, \delta))_\chi$  die Unterkategorie der Harish-Chandra-Moduln mit verallgemeinertem infinitesimalen Charakter  $\chi$ .

Um die Vermutung richtig formulieren zu können, müssen wir den Begriff der „starken reellen Formen“ einführen. (Ausführlich werden starke reelle Formen in [ABV92], ch. 2, behandelt.) Aus der inneren Klasse  $F$  können wir eine Erweiterung  ${}^{\Gamma}G = G \rtimes \Gamma$  konstruieren mit  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \gamma\}$ , indem wir festlegen, dass  $\gamma$  so auf  $G$  operiert wie eine quasispaltende reelle Form aus  $F$ . (Eine reelle Form heißt quasispaltend, wenn sie eine Borelsche stabilisiert.) Diejenigen Elemente  $\delta \in {}^{\Gamma}G \setminus G$  mit  $\delta^2 \in Z(G)$ , für die  $\delta^2$  endliche Ordnung hat, heißen *starke reelle Formen* (zur inneren Klasse  $F$ ).

Eine starke reelle Form  $\delta$  operiert auf  $G$  als antiholomorphe Involution; also kann man jede starke reelle Form auch als reelle Form im alten Sinne („schwache reelle Form“) auffassen. Man prüft leicht, dass die Menge der so erhaltenen schwachen reellen Formen gerade wieder die innere Klasse  $F$  ist. (Allerdings können mehrere starke reelle Formen die gleiche schwache reelle Form induzieren). Wir wollen zwei starke reelle Formen *äquivalent* nennen, wenn sie durch Konjugation mit einem Element aus  $G$  aufeinander abgebildet werden können.

In der Vermutung von Soergel steht auf der Darstellungsseite die direkte Summe der  $\mathcal{M}(G(\mathbb{R}, \delta))_{\chi}$  für mehrere  $\delta$  aus der inneren Klasse  $F$ . Eigentlich möchte man „alle  $\delta \in F$ “ sagen, aber das ist aus mehreren Gründen nicht ganz richtig:

1. Aus jeder Äquivalenzklasse von *starken* reellen Formen soll nur ein Repräsentant genommen werden. (Dadurch können manche schwache reelle Formen mehrfach auftreten.)

2. Eigentlich müsste man auf der geometrischen Seite mit Überlagerungen von  $G$  arbeiten, damit die erhaltene Kategorie groß genug wird. Um sich das zu sparen, schränken wir die Menge der reellen Formen noch etwas ein: Wir betrachten nur diejenigen starken reellen Formen  $\delta \in {}^{\Gamma}G \setminus G$  mit  $\delta^2 = 1$ . (Die Menge der Äquivalenzklassen dieser starken reellen Formen ist dann gerade die nicht-abelsche Kohomologie  $H^1(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ .)

Sei also  $S \subset {}^{\Gamma}G \setminus G$  ein solches Repräsentantensystem starker reeller Formen. Wir können jetzt die Darstellungskategorie angeben:

DEFINITION 1.1. *Die Darstellungskategorie zu  $(G, F, \chi)$  sei die direkte Summe*

$$\bigoplus_{\delta \in S} \mathcal{M}(G(\mathbb{R}, \delta))_{\chi}.$$

Die geometrische Kategorie der Vermutung sieht folgendermaßen aus: Aus den gegebenen Daten  $(G, F, \chi)$  wird eine Varietät  $X$  konstruiert, auf der die Langlands-duale Gruppe  $G^{\vee}$  zu  $G$  operiert. Diese Konstruktion ist etwas aufwändiger, also verschiebe ich die Erklärung auf später.

Auf  $X$  betrachtet man die Kategorie der äquivarianten perversen Garben  $\text{PSh}_{G^v}(X)$  (bezüglich der mittleren Perversität). Es ist bekannt, dass die einfachen Objekte dieser Kategorie in Bijektion zu den einfachen Objekten der Darstellungskategorie stehen; siehe [ABV92]. Sei  $\mathcal{L}_{\text{alle}}$  die direkte Summe all dieser einfachen Objekte (genauer: die direkte Summe je eines Repräsentanten aus jeder Isomorphieklasse). Die Endomorphismen  $\text{End}_{G^v}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\text{alle}}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{G^v}^n(\mathcal{L}_{\text{alle}}, \mathcal{L}_{\text{alle}})$  in der äquivarianten derivierten Kategorie  $\text{D}_{G^v}(X)$  bilden eine graduierte Algebra, die *geometrische Ext-Algebra* zu  $\mathcal{L}_{\text{alle}}$ .

Auch die einfachen  $\text{End}_{G^v}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\text{alle}})$ -Moduln stehen in Bijektion zu den einfachen Objekten der Darstellungskategorie; unsere geometrische Kategorie ist eine Unterkategorie der  $\text{End}_{G^v}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\text{alle}})$ -Moduln: Für eine allgemeine graduierte Algebra  $A$  sei die Kategorie  $A$ -nil der *Nilmoduln* definiert durch

$$A\text{-nil} := \{M \in A\text{-mod} \mid \dim M < \infty, A^n M = 0 \text{ für } n \gg 0\}.$$

DEFINITION 1.2. Die Geometrische Kategorie zu  $(G, F, \chi)$  sei die Kategorie der Nilmoduln

$$\text{End}_{G^v}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\text{alle}})\text{-nil}.$$

VERMUTUNG 1.3 ([Soe01]). Die Darstellungskategorie und die geometrische Kategorie zu  $(G, F, \chi)$  sind äquivalent:

$$\bigoplus_{\delta \in S} \mathcal{M}(G(\mathbb{R}, \delta))_{\chi} \cong \text{End}_{G^v}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\text{alle}})\text{-nil}.$$

### 1.3 Unser Fall

In dem Fall, der in dieser Arbeit bewiesen wird, sind die Daten zur Vermutung die folgenden:

- Die algebraische Gruppe  $G$  ist  $\text{SO}_m$  für  $m \geq 3$ .
- Die innere Klasse  $F$  von reellen Formen ist die, die  $\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$  enthält.
- Der zentrale Charakter  $\chi$ , den wir betrachten wollen, ist der triviale (d. h. der, der zur trivialen Darstellung von  $\mathfrak{g}$  gehört).

In [Kho81] wird nur die Kategorie  $\mathcal{M}(\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R}))_{\chi}$  untersucht, und nicht die gesamte Darstellungskategorie zu dieser Situation (die noch Darstellungen von anderen reellen Formen beinhaltet). Dementsprechend werden wir auch auf der geometrischen Seite nicht die gesamte Kategorie betrachten, sondern nur einen Teil:  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  wird die direkte Summe einer geeigneten Teilmenge der einfachen äquivarianten perversen Garben sein. (Die „nützlichen“; wir werden in der gesamten Arbeit die Objekte als „nützlich“ bezeichnen, aus denen der Teil der geometrischen Kategorie hervorgeht, der  $\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$  entspricht.) Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen:

THEOREM 1.4. (a)  $\text{End}_{G^v}^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  ist ein direkter Summand von  $\text{End}_{G^v}^\bullet(\mathcal{L}_{\text{alle}})$ .

(b) Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{M}(\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R}))_\chi \cong \text{End}_{G^v}^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})\text{-nil}.$$

Teil (a) werden wir schon in Kapitel 4 beweisen; Teil (b) folgt aus Theorem 1.6, dessen Beweis erst mit Kapitel 6 vollendet wird.

#### 1.4 Die Harish-Chandra-Moduln zu $\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$

In diesem Abschnitt geben wir die Ergebnisse aus [Kho81] über die Kategorie  $\mathcal{M}(\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R}))_\chi$  wieder. Sie ist äquivalent zu einer Kategorie  $A_m\text{-nil}$  von Nilmoduln einer geeigneten graduierten Algebra  $A_m$ . Für die Definition von  $A_m$  machen wir eine Fallunterscheidung nach der Parität von  $m$ .

Fall  $m = 2n$  („ $B_{2n+1}$ “ in [Kho81]):  $A_{2n}$  ist die direkte Summe von zwei Kopien der graduierten Algebra, die durch den folgenden Köcher mit Relationen beschrieben wird:

$$\begin{array}{c} \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xleftarrow{b_1} \end{array} \bullet \dots \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{n-1}} \\ \xleftarrow{b_{n-1}} \end{array} \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright c \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} a_{\mu+1}a_\mu = b_\mu b_{\mu+1} = 0 \\ ca_{n-1} = b_{n-1}c = 0 \end{array} \right.$$

Alle Pfeile des Köchers haben Grad 1.

Fall  $m = 2n + 1$  („ $B_{2n}$ “ in [Kho81]):  $A_{2n+1}$  ist die Algebra zum folgendem Köcher:

$$\begin{array}{c} \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xleftarrow{b_1} \end{array} \bullet \dots \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{n-1}} \\ \xleftarrow{b_{n-1}} \end{array} \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_n} \\ \xleftarrow{b_n} \\ \xleftarrow{a_{-n}} \\ \xleftarrow{b_{-n}} \end{array} \bullet \\ \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{-1}} \\ \xleftarrow{b_{-1}} \end{array} \bullet \dots \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{-(n-1)}} \\ \xleftarrow{b_{-(n-1)}} \end{array} \bullet \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} a_{\pm(\mu+1)}a_{\pm\mu} = 0 \\ b_{\pm\mu}b_{\pm(\mu+1)} = 0 \\ b_{\pm n}a_{\mp n} = 0 \end{array} \right.$$

Wieder haben alle Pfeile des Köchers Grad 1. Dieser Köcher hat eigentlich gar keine Besonderheit an der rechten Spitze, so dass man ihn genauso gut gerade darstellen könnte. Bei der Konstruktion der geometrischen Kategorie wird sich allerdings herausstellen, dass es in gewissem Sinne „natürlich“ ist, den Köcher so darzustellen. (Um vorzugreifen: Die Punkte entsprechen einfachen perversen Garben, und wie weit rechts ein Punkt liegt, gibt die Dimension des Trägers an.)

SATZ 1.5 ([Kho81], Theorem 1). Sei die graduierte Algebra  $A_m$  wie oben definiert. Dann ist die Kategorie  $\mathcal{M}(\text{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R}))_\chi$  äquivalent zur Kategorie  $A_m\text{-nil}$ .

Um Aussage (b) von Theorem 1.4 zu zeigen (die Äquivalenz der Kategorien), reicht es jetzt, die folgende (etwas stärkere) Aussage zu zeigen:

THEOREM 1.6. *In der hier beschriebenen Situation gibt es einen Isomorphismus von graduierten Algebren*

$$\mathrm{End}_{G^\vee}^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}}) \cong A_m.$$

### 1.5 Überblick über die geometrische Seite

Sei wie gehabt  $G := \mathrm{SO}_m$ . In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über die Konstruktion von  $\mathrm{End}_{G^\vee}^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$ . Für eine vollständige Definition der Varietät  $X$ , auf der die perversen Garben leben, wird sich der Leser allerdings noch bis zu Abschnitt 2.3 gedulden müssen. (Eine ausführlichere Definition von  $X$  steht in [ABV92].)

*Notation:* In der gesamten Arbeit wird  $n$  der Rang von  $G$  sein, also  $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

In Kapitel 2 wird aus der Gruppe  $G$ , der inneren Klasse von reellen Formen  $F$  und dem trivialen zentralen Charakter  $\chi$  die Varietät  $X$  konstruiert. Diese Varietät besteht aus mehreren Zusammenhangskomponenten  $X_i$ . Die einzelnen Komponenten  $G^\vee \dashrightarrow X_i$  kann man mit Hilfe der *induction equivalence* aus [BL94] (Theorem 2.6.3) zu  $K_i \dashrightarrow \bar{X}$  vereinfachen für Untergruppen  $K_i \subset G^\vee$ . Nach dieser Vereinfachung sind alle Komponenten als Varietäten isomorph, allerdings operieren verschiedene Gruppen auf den verschiedenen Komponenten.

Konstruktion von  $\bar{X}$ :

- Zunächst brauchen wir die Langlands-duale Gruppe  $G^\vee$  von  $G$ :

$$G^\vee = \begin{cases} \mathrm{SO}_{2n} & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \mathrm{SP}_{2n} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

- Aus der dualen Gruppe  $G^\vee$  und dem zentralen Charakter  $\chi$  konstruiert man die Varietät  $\bar{X}$ . Für den trivialen zentralen Charakter ist  $\bar{X}$  besonders einfach:

$$\bar{X} = G^\vee / B^\vee$$

für eine Borelsche  $B^\vee \subset G^\vee$ .

Konstruktion der Gruppen  $K_i$ :

- Aus der inneren Klasse  $F$  von reellen Formen erhält man eine Involution  $a$  des Wurzeldatums: Man wählt eine quasispaltende reelle Form  $\delta_{qs} \in F$  aus; dann gibt es einen maximalen Torus  $T \subset G$ , der von  $\delta_{qs}$  festgehalten wird, und die Operation von  $\delta_{qs}$  auf  $T$  liefert die gewünschte Involution des Wurzeldatums.
- Aus der Involution  $a$  kann man auf der Seite der dualen Gruppe die *L-Gruppe*  ${}^\Gamma G^\vee$  definieren – ein semidirektes Produkt

aus  $G^\vee$  und der Galois-Gruppe  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ . Man erhält in unseren Fällen:

$$\Gamma_{G^\vee} = \begin{cases} O_{2n} & \text{falls } m \equiv 0 \\ SO_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } m \equiv 2 \\ SP_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (4)$$

- Die Gruppen  $K_i$  erhält man nun als Zentralisatoren  $Z_{G^\vee}(y_i)$  von gewissen Elementen  $y_i$  aus  ${}^\Gamma G^\vee \setminus G^\vee$ , die auf  $G^\vee$  als Involutions operieren.

Die perversen Garben  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  leben alle auf einer Komponente  $X_i$  von  $X$ , d. h. wir werden uns das richtige  $y \in {}^\Gamma G^\vee \setminus G^\vee$  aussuchen und dann nur noch mit  $K := Z_{G^\vee}(y) \twoheadrightarrow \bar{X} = G^\vee/B^\vee$  weiterarbeiten.

Berechnung der geometrischen Ext-Algebra  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$ :

- Die einfachen perversen Garben auf  $G^\vee/B^\vee$  bekommt man als intermediäre Ausdehnung der äquivarianten lokalen Systeme auf Bahnen von  $K \twoheadrightarrow G^\vee/B^\vee$ . In [LV83] werden diese Ausdehnungen beschrieben: Sei  $\mathcal{H}$  die Hecke-Algebra zur Weylgruppe  $W$  von  $G^\vee$ . Es wird ein  $\mathcal{H}$ -Modul  $M$  definiert, der die äquivarianten lokalen Systeme als Basis hat – eine Art Grothendieck-Gruppe mit Extrastruktur. Innerhalb dieses Moduls kann man die einfachen perversen Garben untersuchen, was wir in Kapitel 4 tun werden.
- Vorher muss der Hecke-Modul  $M$  natürlich konstruiert werden. Eine Möglichkeit, dies explizit zu tun, wird in [RS93] beschrieben. Wir führen diese Konstruktion in Kapitel 3 durch, allerdings nur für den direkten Summanden  $M_{\text{nütz}}$  von  $M$ , der den einfachen perversen Garben in  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  entspricht.
- Die Rechnung in  $M_{\text{nütz}}$  liefert zwar einige Information darüber, wie die einfachen äquivarianten perversen Garben aussehen, allerdings nicht genug, um die Endomorphismen von  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  zu bestimmen. Die fehlende Information bekommen wir in Kapitel 5, indem wir nochmal genauer untersuchen, wie die Operation der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}$  auf  $M_{\text{nütz}}$  definiert wurde: Für die Definition wurde ausgenutzt, dass  $G^\vee/B^\vee$  „lokal so aussieht wie  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ “. Diese „lokale Ähnlichkeit“ kann man auch funktoriell machen; so erhält man schließlich die fehlende Information über die Endomorphismen von  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$ .
- In Kapitel 6 setzen wir all diese Information zusammen und erhalten für  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  die Algebra, die in Theorem 1.6 behauptet wurde.

## 1.6 Dank

An dieser Stelle möchte ich vor allem Prof. Wolfgang Soergel danken für die gute Betreuung, dafür, dass er immer bereit war, Fragen zu

beantworten und dafür, dass er diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht hat.

Außerdem danke ich Karin Halupczok, Jan-Christoph Schlage-Puchta, Florian Berchthold, Sebastian Holzmann, Bernhard R. Link und Bernhard Seckinger für fachliche Tipps, Korrekturlesen und Beratung in  $\text{\TeX}$ -Fragen.

Und schließlich danke ich noch der Landesgraduiertenförderung Baden-Württemberg für zwei Jahre finanzielle Unterstützung.



## KAPITEL 2

### Konstruktion der Varietät $X$ nach [ABV92]

In der Übersicht wurde bereits erwähnt, dass aus der Gruppe  $G$ , dem zentralen Charakter  $\chi$  und der inneren Klasse  $F$  von reellen Formen ein Raum  $X$  konstruiert werden soll, auf dem die Langlands-duale Gruppe  $G^\vee$  operiert. Das ist das Ziel dieses Kapitels. Wir halten uns dabei an [ABV92].

#### 2.1 Daten und Notationen zu $\mathrm{SO}_{2n}$ , $\mathrm{SO}_{2n+1}$ und $\mathrm{SP}_{2n}$

Wir werden in dieser Arbeit mit den Gruppen  $\mathrm{SO}_{2n}$ ,  $\mathrm{SO}_{2n+1}$  und  $\mathrm{SP}_{2n}$  arbeiten. Wir beginnen mit der Auflistung der Daten dieser Gruppen (siehe z. B. [Bou68]). Dabei definieren wir auch die Notationen, die wir verwenden werden.

*Notation:* Sei  $G$  eine der oben genannten Gruppen, und seien  $T$  und  $B$  ein maximaler Torus und eine Borelsche von  $G$ . Wir verwenden die folgenden Notationen:

- $X^\bullet(T), X_\bullet(T)$ : Wurzelgitter, Cowurzelgitter
- $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ : Basis von  $X^\bullet(T)$  wie in [Bou68]
- $\{e_1, \dots, e_n\}$ : Dazu duale Basis von  $X_\bullet(T)$
- $\Delta, \Delta^+$ : Wurzelsystem, positive Wurzeln
- $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_\star\}$ : einfache Wurzeln
- $W$ : Weylgruppe
- $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}, s_\star\}$ : Einfache Spiegelungen
- $U$ : Unipotentes Radikal von  $B$
- $U_\alpha$ : Wurzelgruppe zu  $\alpha \in \Delta$
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}$ : Lie-Algebren zu  $G, T, B, U$

Außerdem brauchen wir noch eine Notation für Elemente der Weylgruppe:

*Notation:* Die Elemente von  $W$  werden durch Folgen der Form  $w = |a_1|a_2| \dots |a_n|$  ( $1 \leq a_i \leq n$ ) dargestellt, wobei über jedem Folgenglied

noch ein Querstrich stehen kann. Die Bedeutung davon ist:

$$w(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{a_i} & \text{falls über } a_i \text{ kein Strich ist} \\ -\varepsilon_{a_i} & \text{falls über } a_i \text{ ein Strich ist.} \end{cases}$$

Damit eine solche Folge ein Element der Weylgruppe darstellt, müssen die  $a_i$  eine Permutation von  $\{1, \dots, n\}$  bilden. Wenn  $G = \mathrm{SO}_{2n}$  ist, muss außerdem die Anzahl der Querstriche gerade sein.

Die Länge eines Weylgruppen-Elements in dieser Notation erhält man durch „erweitertes Fehlstände-Zählen“: Für alle  $1 \leq i < j \leq n$  prüft man, ob  $a_i < a_j$  ist und ob auf  $a_i$  ein Querstrich ist. (Ob auf  $a_j$  ein Querstrich ist, ist egal.) Die vier Möglichkeiten tragen folgendermaßen zur Länge bei:

$$\begin{aligned} a_i < a_j, \text{ kein Querstrich auf } a_i: & 0 \\ a_i > a_j, \text{ kein Querstrich auf } a_i: & 1 \\ a_i < a_j, \text{ Querstrich auf } a_i: & 2 \\ a_i > a_j, \text{ Querstrich auf } a_i: & 1 \end{aligned}$$

Auf diese Art erhält man die Länge eines Elements der Weylgruppe von  $\mathrm{SO}_{2n}$ . Für die Länge eines Elements der Weylgruppe von  $\mathrm{SO}_{2n+1}$  bzw.  $\mathrm{SP}_{2n}$  muss man außerdem noch die Gesamtzahl der Querstriche dazuaddieren.

Es folgen die Daten der Gruppen:

Gruppe	$\mathrm{SO}_{2n+1}$	$\mathrm{SP}_{2n}$	$\mathrm{SO}_{2n}$
Typ	$B_n$	$C_n$	$D_n$
Duale Gruppe	$\mathrm{SP}_{2n}$	$\mathrm{SO}_{2n+1}$	$\mathrm{SO}_{2n}$
Positive Wurz. $\Delta^+$	$\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i < j\} \cup \{\varepsilon_i\}$	$\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i < j\} \cup \{2\varepsilon_i\}$	$\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i < j\}$
Einfache Wurz. $\Pi$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $\alpha_\star = \varepsilon_n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $\alpha_\star = 2\varepsilon_n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $\alpha_\star = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$
Einfache Spieg. $S$	$s_i =  1 2  \dots  i+1 i  \dots  n $ $s_\star =  1 2  \dots  n-1 \bar{n} $		$s_i =  1  \dots  i+1 i  \dots  n $ $s_\star =  1  \dots  n-2 \bar{n} \overline{n-1} $
Längstes Element	$w_0 =  \bar{1} \bar{2}  \dots  \overline{n-1} \bar{n} $		$w_0 =  \bar{1} \bar{2}  \dots  \overline{n-1} \bar{\bar{n}} $
Länge $l(w)$	Erw. Fehlstände + #Striche		Erw. Fehlstände

(Bei  $\mathrm{SO}_{2n}$  hat  $w_0$  einen Querstrich auf dem  $n$  genau dann, wenn  $n$  gerade ist.)

## 2.2 Die reelle Form und die L-Gruppe

Ab jetzt und für den Rest dieses Kapitels sei  $G = \mathrm{SO}_m$  mit  $m = 2n$  oder  $m = 2n + 1$ . Die Langlands-duale Gruppe dazu ist

$$G^\vee \cong \begin{cases} \mathrm{SO}_{2n} & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \mathrm{SP}_{2n} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir wählen Tori  $T, T^\vee$  und Borelsche  $B, B^\vee$  von  $G$  bzw.  $G^\vee$ .

In diesem Abschnitt ist es einfacher, mit konkreten Matrizen zu arbeiten. Dazu verwenden wir eine Definition von  $\mathrm{SO}_m$ , bei der es einen maximalen Torus aus Diagonalmatrizen gibt:

$$(1) \quad \mathrm{SO}_m := \left\{ x \in \mathrm{GL}_m \mid x^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & 1 & \\ & & & \swarrow & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & 1 & \\ & & & \swarrow & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = 1 \wedge \det x = 1 \right\}.$$

O. B. d. A. sei  $T$  der maximale Torus aus Diagonalmatrizen und  $B$  die Borelsche aus oberen Dreiecksmatrizen. Sei außerdem  $U$  das unipotente Radikal von  $B$ , und sei  $U_\alpha$  die Wurzelgruppe zur Wurzel  $\alpha \in \Delta$ .

Wir sind an  $\mathrm{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$  interessiert. Die folgende antiholomorphe Involution von  $\mathrm{SO}_m(\mathbb{C})$  hat  $\mathrm{SO}_{m-1,1}(\mathbb{R})$  als Fixgruppe:

$$\delta_1: x \longmapsto d_1 \bar{x} d_1^{-1},$$

wobei

$$d_1 := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & 1 & \\ & & & \swarrow & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

( $d_1$  liegt in manchen Fällen nicht in  $\mathrm{SO}_m$ , sondern nur in  $\mathrm{O}_m$ .)

Wir suchen die Involution  $a$  des Wurzelsystems von  $\mathrm{SO}_m$ , die der inneren Klasse  $F$  von  $\delta_1$  entspricht. Dazu brauchen wir erst mal eine quasispaltende reelle Form in  $F$ . Sei

$$d_{qs} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & 1 & \\ & & & \swarrow & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \text{falls } m \equiv 0 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 & \\ & & & & \swarrow & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \text{falls } m \equiv 1 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \swarrow & & \\ & & & & \\ & & & & \swarrow & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \text{falls } m \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Behauptung:* Die Involution

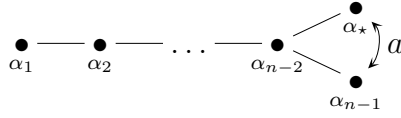
$$\delta_{qs}: x \longmapsto d_{qs} \bar{x} d_{qs}^{-1}$$

ist eine quasispaltende reelle Form in  $F$ .

Wir prüfen zwei Dinge: (a)  $\delta_{qs}$  hält unsere Borelsche  $B$  fest. Im Fall  $m \equiv 0 \pmod{4}$  beachte man, dass der Matrixeintrag  $b_{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1}$  eines Elements  $(b_{ij}) \in B$  immer 0 ist.

(b)  $\delta_{qs}$  und  $\delta_1$  sind in derselben inneren Klasse, d. h.  $\delta_{qs} = \text{Int } y \circ \delta_1$  für ein  $y \in \text{SO}_m(\mathbb{C})$ . Es gilt sogar  $d_{qs} = yd_1$  (für ein  $y \in \text{SO}_m$ ), was man daran sieht, dass  $d_{qs}$  und  $d_1$  beide in  $\text{O}_m$  liegen und dieselbe Determinante haben:  $-1$  falls  $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ,  $1$  falls  $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ .

Die Operation von  $\delta_{qs}$  auf dem Torus definiert die gesuchte Involution  $a$  des Wurzelsystems: Falls  $m \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$  ist, wird der Torus festgehalten,  $\delta_{qs}$  ist spaltend und  $a = \text{id}$ ; falls  $m \equiv 0 \pmod{4}$  ist, werden die Wurzeln  $\alpha_{n-1}$  und  $\alpha_*$  vertauscht:



Jetzt gehen wir zur dualen Gruppe über und konstruieren dort aus der Involution  $a$  des Wurzelsystems die  $L$ -Gruppe (vgl. [ABV92], ch. 4 oder [Soe01]).

Die  $L$ -Gruppe ist ein semidirektes Produkt  $\Gamma G^\vee = G^\vee \rtimes \Gamma$  mit  $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \gamma\}$ , wobei die Operation von  $\gamma$  auf  $G^\vee$  durch die Involution  $a$  des Wurzelsystems gegeben wird: Auf  $T^\vee$  operiere  $\gamma$  wie  $a$ . Um die Operation von  $\gamma$  auf ganz  $G^\vee$  fortzusetzen, wähle man Isomorphismen  $x_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow U_\alpha$  für alle einfachen Wurzeln  $\alpha \in \Pi$ .  $\gamma$  soll dann so fortgesetzt werden, dass  $\gamma \circ x_\alpha = x_{a(\alpha)}$  gilt. (Eine auf diese Art entstandene Involution  $\gamma$  wird in [ABV92] „distinguished“ genannt.)

Wenn  $a$  die Identität ist ( $m \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ ), erhält man als  $L$ -Gruppe einfach

$$\Gamma G^\vee \cong G^\vee \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Im Fall  $m \equiv 0 \pmod{4}$  erhalten wir

$$(2) \quad \Gamma G^\vee \cong \text{O}_m.$$

(Bei (2) identifizieren wir  $\gamma$  mit  $d_{qs} \in \text{O}_m \setminus \text{SO}_m$ ; man sieht leicht, dass die Involution  $\text{Int } d_{qs}$  von  $\text{SO}_m$  auf  $T^\vee$  wie  $a$  operiert und „distinguished“ ist.)

### 2.3 Die Varietät $X$ , wenn der Charakter $\chi$ trivial ist

Wenn  $\chi$  – wie bei uns – der triviale Charakter ist, sieht die Varietät  $X$ , auf der wir äquivariante perverse Garben betrachten wollen, besonders einfach aus:

LEMMA 2.1. *Wenn  $\chi$  trivial ist, ist*

$$X = \bigcup_y G^\vee \times_{\mathbb{Z}_{G^\vee}(y)} G^\vee / B^\vee.$$

*Die Vereinigung geht dabei über eine endliche Teilmenge von  $\Gamma G^\vee \setminus G^\vee$ .*

Dieses Lemma macht natürlich erst Sinn, wenn man  $X$  definiert hat. Eine ausführliche Konstruktion von  $X$  befindet sich in [ABV92], ch. 6. Wir geben diese Konstruktion während des nachfolgenden Beweises wieder.

*Beweis (von Lemma 2.1):* Zunächst müssen wir aus unserem Charakter  $\chi$  eine Bahn  $\mathcal{O}(\chi)$  auf den halbeinfachen Elementen der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}_{ss}^\vee$  unter der Operation von  $G^\vee$  konstruieren. Für die spätere Rechnung ist es praktisch, gleich einen Repräsentanten  $\lambda$  von  $\mathcal{O}(\chi)$  zu wählen. Wir erhalten  $\mathcal{O}(\chi)$  als Bild des Charakters  $\chi$  unter der folgenden Verknüpfung (vgl. [Soe01]):

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Max } Z(U(\mathfrak{g})) & \cong & W \setminus \mathfrak{h}^* & \cong & W \setminus \mathfrak{h}^\vee & \cong & G^\vee \setminus \mathfrak{g}_{ss}^\vee \\ \chi & \mapsto & W\rho & \mapsto & W\rho & \mapsto & G^\vee\rho =: \mathcal{O}(\chi). \end{array}$$

Die erste Bijektion wird vom Harish-Chandra-Homomorphismus induziert und bildet den trivialen Charakter  $\chi$  auf die Bahn von  $\rho$  unter  $W$  ab;  $\rho$  ist wie üblich die Hälfte der Summe der positiven Wurzeln. Bei der zweiten Bijektion identifizieren wir Wurzeln von  $\mathfrak{g}$  mit Co-Wurzeln von  $\mathfrak{g}^\vee$ . Die dritte Bijektion ist der Satz von Chevalley. Wir erhalten so  $\lambda = \rho$  als einen Repräsentanten von  $\mathcal{O}(\chi)$ .

Aus  $\lambda$  (genauer:  $\mathcal{O}(\lambda)$ ) werden zur Konstruktion von  $X$  in [ABV92] zunächst einige andere Objekte definiert, die wir jetzt der Reihe nach untersuchen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^\vee(\lambda)_n &:= \{\mu \in \mathfrak{g}^\vee \mid [\lambda, \mu] = n\mu\} \\ \mathfrak{n}^\vee(\lambda) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathfrak{g}^\vee(\lambda)_n \\ U^\vee(\lambda) &:= \text{Zusammenhängende unipotente Untergruppe} \\ &\quad \text{von } G \text{ mit Lie-Algebra } \mathfrak{n}^\vee(\lambda). \end{aligned}$$

*Behauptung:*  $\mathfrak{n}^\vee(\lambda) = \mathfrak{n}^\vee$  und  $U^\vee(\lambda) = U^\vee$ .

Um zu sehen, ob ein  $\mu \in \mathfrak{g}^\vee$  in  $\mathfrak{n}^\vee(\lambda)$  liegt, zerlegt man  $\mu$  bezüglich der Gewichträume:  $\mu = \mu_0 + \sum_{\alpha^\vee} \mu_{\alpha^\vee}$ . Auf dem Anteil  $\mu_{\alpha^\vee} \in \mathfrak{g}_{\alpha^\vee}^\vee$  operiert  $\lambda$  durch  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ . Das ist eine positive ganze Zahl genau dann, wenn  $\alpha^\vee \in (\Delta^\vee)^+$  ist, da  $\lambda = \rho$  ist. Daraus folgt die Behauptung.

Als nächstes brauchen wir:

$$\begin{aligned} e(\lambda) &:= e^{2\pi i \lambda} \in G^\vee \\ G^\vee(\lambda) &:= Z_{G^\vee}(e(\lambda)). \end{aligned}$$

*Behauptung:*  $e(\lambda)$  liegt im Zentrum von  $G^\vee$ , und insbesondere ist  $G^\vee(\lambda) = G^\vee$ .

Es reicht zu zeigen, dass  $e(\lambda)$  mit den Elementen der Gewichträume  $U_{\alpha^\vee}$  ( $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ ) kommutiert. Sei  $x_{\alpha^\vee}: \mathbb{C} \rightarrow U_{\alpha^\vee}$  ein Isomorphismus. Es gilt:

$$\text{Int}(e^{2\pi i \lambda})x_{\alpha^\vee}(z) = x_{\alpha^\vee}(\alpha^\vee(e^{2\pi i \lambda}) \cdot z) = x_{\alpha^\vee}(e^{2\pi i \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle} \cdot z) = x_{\alpha^\vee}(z).$$

Schließlich brauchen wir noch

$$L^\vee(\lambda) := Z_{G^\vee}(\lambda).$$

*Behauptung:*  $L^\vee(\lambda) = T^\vee$ .

$\lambda$  operiert nichttrivial auf jedem Wurzelraum  $\mathfrak{g}_{\alpha^\vee}^\vee$ ; also operiert für geeignetes  $t$  auch  $e^{t\lambda}$  nichttrivial auf allen  $U_{\alpha^\vee}^\vee$ . Aus  $x \in Z_{G^\vee}(\lambda)$  folgt  $(\text{Int } x)(e^{t\lambda}) = e^{(\text{ad } x)(t\lambda)} = e^{t\lambda}$ , und daraus folgt  $x \in T^\vee$ .

Die restlichen Objekte aus [ABV92] auf dem Weg zu  $X$  sind:

$$\begin{aligned} P^\vee(\lambda) &:= L^\vee(\lambda)U^\vee(\lambda) = T^\vee U^\vee = B^\vee \\ \mathcal{C} &:= e(\mathcal{O}(\chi)) = \{ge(\lambda)g^{-1} \mid g \in G^\vee\} = \{e(\lambda)\} \\ \mathcal{I} &:= \{y \in {}^\Gamma G^\vee \setminus G^\vee \mid y^2 \in \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

Wir können jetzt die Varietät  $X$  angeben: Seien  $\mathcal{I}_i$  die Bahnen von  $\mathcal{I}$  unter  $G^\vee$ . ( $G^\vee$  operiert durch Konjugation auf  $\mathcal{I}$ .) Es gibt endlich viele solche Bahnen. Wir wählen aus jeder Bahn einen Repräsentanten  $y_i \in \mathcal{I}_i$ . Sei

$$K(y_i) := Z_{G^\vee}(y_i).$$

Dann ist

$$X := \bigcup_{y_i} G^\vee \times_{K(y_i)} G^\vee(\lambda)/P^\vee(\lambda) = \bigcup_{y_i} G^\vee \times_{K(y_i)} G^\vee/B^\vee.$$

□

Wie bereits im Überblick angekündigt, können wir die einzelnen Komponenten  $X_i := G^\vee \times_{K(y_i)} G^\vee/B^\vee$  mit Hilfe der *induction equivalence* noch vereinfachen. Die Kategorie der (derivierten/perversen) Garben auf  $G^\vee \dashrightarrow X_i$  ist äquivalent zur Kategorie der Garben auf  $K(y_i) \dashrightarrow G^\vee/B^\vee$ .

Wir interessieren uns nur für eine einzige Komponente von  $X$ . Im letzten Abschnitt dieses Kapitels bestimmen wir ein entsprechendes  $y \in \mathcal{I}$ ; dann haben wir alles, um im nächsten Kapitel mit der Untersuchung der äquivarianten derivierten Kategorie  $D_{K(y)}(G^\vee/B^\vee)$  zu beginnen.

## 2.4 Berechnung von $y$

In diesem Abschnitt bestimmen wir ein  $y \in \mathcal{I}$ , das die gewünschte Komponente der Varietät  $X$  liefert, d. h. die Komponente, auf der die nützliche perverse Garbe  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  lebt. Dazu berechnen wir erst mal  $e(\lambda)$ . (Zur Erinnerung:  $\mathcal{I} = \{y \in {}^\Gamma G^\vee \setminus G^\vee \mid y^2 = e(\lambda)\}$ .)

$\lambda$  ist die halbe Summe der positiven Co-Wurzeln von  $G^\vee$ , also:

$$\lambda = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (n-i) \cdot \varepsilon_i & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \sum_{i=1}^n (n + \frac{1}{2} - i) \cdot \varepsilon_i & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$





## KAPITEL 3

### Konstruktion des Hecke-Algebren-Moduls $M_{\text{nütz}}$

#### 3.1 Ziel dieses Kapitels

Aus dem vorigen Kapitel haben wir eine Gruppe  $G^\vee$  mit einem Torus  $T^\vee$  und einer Borelschen  $B^\vee$ , eine Erweiterung  ${}^\Gamma G^\vee$  davon und ein  $y \in {}^\Gamma G^\vee \setminus G^\vee$  der Ordnung 2, das  $T^\vee$  und  $B^\vee$  festhält. Wir interessieren uns für  $K := Z_{G^\vee}(y)$ -äquivariante perverse Garben auf  $G^\vee/B^\vee$ . Ab diesem Kapitel wird nur noch auf der Seite der dualen Gruppe gerechnet, deshalb lassen wir ab sofort alle „ $\vee$ “ weg.

Da  $y^2 = 1$  ist, können wir  ${}^\Gamma G$  als semidirektes Produkt  $G \rtimes \{1, y\}$  auffassen. In Zukunft sei  $\Gamma := \{1, y\} \subset {}^\Gamma G$  (im Gegensatz zu  $\Gamma = \{1, \gamma\}$  bei der Definition der L-Gruppe in Abschnitt 2.2.)

Einfache äquivariante perverse Garben sind intermediäre Erweiterungen von äquivarianten lokalen Systemen auf Bahnen (siehe z. B. [BBD82]). Sei  $\mathcal{H}$  die Hecke-Algebra zum Coxeter-System  $(W, S)$ . In [LV83] wird ein  $\mathcal{H}$ -Modul  $M$  definiert, der es erlaubt, diese intermediären Ausdehnungen zu berechnen. Sei  $\mathcal{D}$  die Menge der  $\delta_{\mathcal{O}, \gamma}$ , wobei  $\mathcal{O}$  eine Bahn von  $K \dashrightarrow G/B$  ist und  $\gamma$  ein äquivariantes lokales System auf  $\mathcal{O}$ . Der  $\mathcal{H}$ -Modul  $M$  ist zunächst ein freier  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Modul mit Basis  $\mathcal{D}$ . Die Operation von  $\mathcal{H}$  auf  $M$  kodiert Information über die Geometrie der Bahnen.

In [RS93] wird der Modul  $M$  untersucht – genau genug, dass wir den direkten Summanden  $M_{\text{nütz}} \subset M$ , der uns interessiert, explizit konstruieren können. In diesem Kapitel wenden wir die Methoden aus [RS93] an, um dies zu tun; in den darauffolgenden Kapiteln verwenden wir  $M_{\text{nütz}}$ , um die Endomorphismen von  $\mathcal{L}_{\text{nütz}}$  zu bestimmen.

#### 3.2 Involutionen in ${}^\Gamma W \setminus W$

Um  $M$  zu konstruieren muss man als erstes die Bahnen von  $K \dashrightarrow G/B$  verstehen. In [RS93] wird dazu eine Menge von „getwisteten“ Involutionen der Weylgruppe  $W$  definiert und außerdem eine Abbildung  $\phi$  von den Bahnen in diese getwisteten Involutionen. Mit Hilfe dieser Abbildung erhält man Informationen über die Bahnen durch kombinatorische Rechnungen in der Weylgruppe. Wir werden hier statt der getwisteten Involutionen in  $W$  normale Involutionen in „ ${}^\Gamma W \setminus W$ “ verwenden; das passt besser in den Kontext und vereinfacht ein paar Rechnungen. Alle Rechnungen aus [RS93] lassen sich einfach in diese Version übersetzen.

DEFINITION 3.1. *Sei*

$${}^{\Gamma}\mathbf{N}(T) := \mathbf{N}_{\Gamma G}(T) = \mathbf{N}(T) \cdot \Gamma \cong \mathbf{N}(T) \rtimes \Gamma$$

der erweiterte Normalisator von  $T$  und

$${}^{\Gamma}W := {}^{\Gamma}\mathbf{N}(T)/T \cong W \rtimes \Gamma$$

die erweiterte Weylgruppe. (Wir werden  $y \in \Gamma$  jetzt manchmal als Element von  ${}^{\Gamma}W$  auffassen.)

*Bemerkung:* Die Operation von  $W$  auf dem Torus und dem Gewichtgitter setzt sich in natürlicher Weise zu einer Operation von  ${}^{\Gamma}W$  fort.

In Abschnitt 2.1 haben wir eine Notation für Elemente der Weylgruppe definiert. Diese Notation verwenden wir auch für Elemente von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$ : Ein Element  $a \in {}^{\Gamma}W \setminus W$  wird durch eine Folge  $a = |a_1|a_2| \dots |a_n|$  dargestellt, wobei wieder Querstriche über den Folgengliedern sein können. Die Bedeutung soll auch wieder sein:

$$a(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{a_i} & \text{falls über } a_i \text{ kein Strich ist} \\ -\varepsilon_{a_i} & \text{falls über } a_i \text{ ein Strich ist.} \end{cases}$$

Wenn  ${}^{\Gamma}G \cong G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist, kann die gleiche Folge sowohl ein Element von  $W$  als auch ein Element von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$  bezeichnen. Da wir aber nie mit  ${}^{\Gamma}W$  als Ganzes arbeiten werden, wird immer aus dem Kontext klar werden, was gemeint ist.

*Bemerkung:* Der einzige Fall, in dem Elemente von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$  anders aussehen als Elemente von  $W$ , ist der mit  $m \equiv 0 \pmod{4}$ : In diesem Fall ist  ${}^{\Gamma}G \cong \mathbf{O}_m$ ,  $y = |1|2| \dots |n-1|\bar{n}|$  (als Element von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$ ), und Folgen stellen Elemente von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$  dar, wenn die Anzahl der Querstriche ungerade ist.

Wir werden später eine „Bruhat-Ordnung“ auf  ${}^{\Gamma}W \setminus W$  benötigen. Elemente  $a \in {}^{\Gamma}W \setminus W$  haben immer die Form  $wy$  für ein  $w \in W$ . Wir können also definieren:

$$wy < w'y \Leftrightarrow w < w'.$$

*Bemerkung:*  ${}^{\Gamma}W$  ist zwar eine Coxeter-Gruppe, und somit gibt es darauf eine Bruhat-Ordnung; das ist aber nicht die, die wir wollen. Man beachte z. B., dass im Fall  ${}^{\Gamma}G \cong \mathbf{O}_{2n}$  die einfache Spiegelung  $s_{\star} = |1|2| \dots |n-2|\overline{n-1}|\bar{n}| \in S$  als Element von  ${}^{\Gamma}W$  nicht mehr einfach wäre.

Jetzt definieren wir die Menge der Involutionen in  ${}^{\Gamma}W \setminus W$ , die im nächsten Abschnitt als Bildbereich der Abbildung  $\phi$  dienen wird:

DEFINITION 3.2. *Sei  $\mathcal{I} := \{a \in {}^{\Gamma}W \setminus W \mid a^2 = 1\}$  die Menge der Involutionen in  ${}^{\Gamma}W \setminus W$ .*

### 3.3 Die Abbildung $\phi$ von den Bahnen in die Involutionen

DEFINITION 3.3. Sei  $V$  die Menge der Bahnen von  $K \twoheadrightarrow G/B$ .

*Bemerkung:* Unser  $V$  steht in Bijektion zum  $V$  aus [RS93].

*Bemerkung:* Wir werden in Zukunft oft von Repräsentanten  $x \in G$  einer Bahn  $\mathcal{O} \in V$  sprechen, obwohl genau genommen nur  $xB$  ein Repräsentant ist.

Um die Abbildung  $\phi: V \rightarrow \mathcal{I}$  zu definieren, muss zunächst eine andere Abbildung  $\kappa$  definiert werden:

DEFINITION 3.4. Sei  $\kappa: G \rightarrow {}^1G \setminus G, x \mapsto x^{-1}yx$ .

DEFINITION 3.5. Für  $\mathcal{O} \in V$  und  $x \in G$  ein Repräsentant von  $\mathcal{O}$  mit  $\kappa(x) \in {}^1N(T)$  sei  $\phi(\mathcal{O}) := \kappa(x)T \in \mathcal{I}$  das von  $\kappa(x)$  repräsentierte Element aus  ${}^1W \setminus W$ .

In [RS93] wird gezeigt, dass dies eine sinnvolle Definition für eine Abbildung  $\phi: V \rightarrow \mathcal{I}$  ist: Jede Bahn  $\mathcal{O}$  hat einen Repräsentanten  $x \in G$  mit  $\kappa(x) \in {}^1N(T)$ , alle solche Repräsentanten einer Bahn liefern dasselbe Element der erweiterten Weylgruppe, und dieses Element  $\phi(\mathcal{O})$  ist eine Involution.

Wir wollen statt mit den Bahnen mit ihren Bildern unter  $\phi$  arbeiten. Dazu wäre es am besten, wenn  $\phi$  bijektiv wäre. Das ist zwar nicht der Fall, aber es ist nicht so weit davon entfernt. Dazu ein Lemma, das ein paar Aussagen aus [RS93] zusammenfasst.

LEMMA 3.6. Sei  $\mathcal{O}_{\max} \in V$  die offene Bahn.

- (a) Das Bild von  $\phi$  ist  $\{a \in \mathcal{I} \mid a \leq \phi(\mathcal{O}_{\max})\}$ .
- (b)  $\phi(\mathcal{O}_{\max})$  hat  $\mathcal{O}_{\max}$  als einziges Urbild.

In Abschnitt 2.4 hatten wir  $y$  so gewählt, dass die Involution  $\text{Int } y$  quasispaltend ist, d. h. es gibt ein  $x \in G$  mit  $x^{-1}yxy^{-1}T = w_0$ . Für  $\mathcal{O} := KxB/B$  bedeutet das:  $\phi(\mathcal{O}) = \kappa(x)T = w_0y$ . Da  $w_0y$  das längste Element von  $\mathcal{I}$  ist, folgt daraus (mit Lemma 3.6 (a)), dass  $\phi$  surjektiv ist. Zusammen mit Lemma 3.6 (b) erhalten wir die folgende Aussage, die wir später brauchen werden:

LEMMA 3.7.  $w_0y \in \mathcal{I}$  hat unter  $\phi$  die offene Bahn als Urbild und sonst nichts:  $\phi^{-1}(w_0y) = \{\mathcal{O}_{\max}\}$ .

*Bemerkung:* Bei der Anwendung dieses Lemmas wird man sehen, das auch andere Involutionen in  $\mathcal{I}$  wenige Urbilder unter  $\phi$  haben.

### 3.4 Das Produkt einer Bahn mit $P_s$ sieht aus wie $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$

Jetzt werfen wir erst mal einen genaueren Blick auf die Bahnen. Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung, und sei  $P_s := B \cup BsB$  die zugehörige minimale Parabolische.

Wenn wir eine Bahn  $\mathcal{O}$  gegeben haben, können wir die Menge  $\mathcal{O}P_s = \{xpB \mid xB \in \mathcal{O}, p \in P_s\}$  betrachten; sie ist eine Vereinigung von wenigen Bahnen, die man gut in den Griff bekommt. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass  $K \dashrightarrow \mathcal{O}P_s$  im Wesentlichen so aussieht wie  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , auf dem eine Untergruppe von  $\text{PGL}_2$  operiert. (Siehe z. B. [RS93], §2, [LV83] und [Vog83]). Im darauffolgenden Abschnitt wird gezeigt, wie man anhand von  $\phi(\mathcal{O}) \in \mathcal{I}$  erkennen kann, welche Untergruppe von  $\text{PGL}_2$  operiert; so können wir durch kombinatorische Rechnungen in  $\mathcal{I}$  Daten über die Geometrie erhalten.

Aus diesen Daten wird später die Operation der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}$  auf dem Hecke-Modul  $M$  definiert. Außerdem werden wir in einigen Fällen explizit verstehen können, wie die äquivariante derivierte Kategorie  $\text{D}_K(\mathcal{O}P_s)$  aussieht, was uns einige der Homomorphismengruppen liefern wird, die wir für  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  benötigen.

Zunächst eine Definition, um die Sprache zu vereinfachen:

**DEFINITION 3.8.** *Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung.*

- (a) *Zwei Bahnen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  heißen  $s$ -benachbart falls  $\mathcal{O}P_s = \mathcal{O}'P_s$ .*
- (b) *Die Menge der Bahnen  $\{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}P_s\}$  heiße  $s$ -Nachbarschaft von  $\mathcal{O}$ . (Manchmal werden wir auch die Vereinigung  $\mathcal{O}P_s$  eine  $s$ -Nachbarschaft nennen.)*
- (c) *Wenn  $\mathcal{O}$  offen in  $\mathcal{O}P_s$  ist, heiße  $\mathcal{O}$  groß (bzgl.  $s$ ).*

Sei nun eine einfache Spiegelung  $s \in S$  und ein  $x \in G$  gegeben. Wir untersuchen die Geometrie der  $s$ -Nachbarschaft

$$(3) \quad K \dashrightarrow KxP_s/B.$$

Wir beginnen mit ein paar Umformungen, die die äquivariante derivierte Kategorie  $\text{D}_K(KxP_s/B)$  nicht verändern: Zunächst konjugieren wir mit  $x$ . Dazu definiere

$$K_x := x^{-1}Kx.$$

Durch Konjugation von (3) erhält man

$$K_x \dashrightarrow K_xP_s/B.$$

$K_xP_s/B$  lässt sich schreiben als  $K_x \times_{K_x \cap P_s} P_s/B$ . Also ist – nach der *induction equivalence* – die äquivariante derivierte Kategorie auch auf dem folgenden Raum noch die gleiche:

$$(4) \quad K_x \cap P_s \dashrightarrow P_s/B \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C}.$$

Sei  $U_s$  das unipotente Radikal von  $P_s$  und  $T_s \subset T$  der Kern der zu  $s$  gehörigen einfachen Wurzel  $\alpha \in \Pi$ . Sowohl  $U_s$  als auch  $T_s$  operieren trivial auf  $P_s/B$ , und  $U_s T_s$  ist ein Normalteiler von  $P_s$ . Wir können also  $K_x \cap U_s T_s$  aus  $K_x \cap P_s$  herausschneiden und erhalten so als operierende Gruppe

$$K_{\text{St}} := (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s T_s) \cong (K_x U_s T_s \cap P_s)/U_s T_s.$$

(„St“ = „Stück“;  $K_{\text{St}}$  das ein Stück von  $K$ .)  $K_{\text{St}} \dashrightarrow P_s/B$  hat zwar eine andere äquivariante derivierte Kategorie als (4), aber die Geometrie der Bahnen bleibt gleich; das genügt uns im Moment. In Kapitel 5 werden wir uns in einigen Fällen überlegen, was genau mit der derivierten Kategorie passiert.

Jetzt sind wir in der eingangs beschriebenen Situation:  $K_{\text{St}}$  ist eine Untergruppe von  $P_s/U_s T_s \cong \text{PGL}_2$ , die auf  $P_s/B \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  operiert. Wir definieren noch ein paar weitere Gruppen:

$$\begin{aligned} G_{\text{St}} &:= P_s/U_s T_s \cong \text{PGL}_2 \\ B_{\text{St}} &:= B/U_s T_s \subset G_{\text{St}} \\ T_{\text{St}} &:= T/T_s \subset B_{\text{St}}. \end{aligned}$$

Dann ist  $P_s/B \cong G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ . Wir haben also

$$K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}.$$

Die Theorie von  $\text{PGL}_2$  liefert jetzt eine Liste von möglichen Gruppen  $K_{\text{St}} \subset G_{\text{St}}$  und die zugehörigen Bahnen auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ , und damit eine Liste von möglichen Beziehungen zwischen den Bahnen einer Nachbarschaft.

Man beachte, dass die Definition von  $K_{\text{St}}$  von der Wahl des Repräsentanten  $x$  abhängt; verschiedene Repräsentanten liefern jedoch zueinander konjugierte Untergruppen von  $G_{\text{St}}$ , so dass „die Gruppe  $K_{\text{St}}$  zu einer Nachbarschaft“ zumindest bis auf Konjugation Sinn macht.

Im nächsten Abschnitt bestimmen wir so genau wie möglich anhand von  $\phi(\mathcal{O})$  und  $s$ , welche Gruppe  $K_{\text{St}}$  bei der Nachbarschaft  $\mathcal{O}P_s$  auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  operiert.

### 3.5 Die verschiedenen Möglichkeiten für $K_{\text{St}}$

Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung und  $\alpha \in \Pi$  die zugehörige einfache Wurzel. Wir betrachten eine Nachbarschaft  $\mathcal{O}P_s$  (für ein  $\mathcal{O} \in V$ ). Ziel dieses Abschnitts ist die Auflistung der möglichen zugehörigen Gruppen  $K_{\text{St}}$  (bis auf Konjugation) und der Bahnen davon auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  und dies in Beziehung zu  $\phi(\mathcal{O})$  zu setzen.

Wir werfen zunächst einen Blick auf mögliche Beziehungen zwischen den Involuntoren  $\phi(\mathcal{O})$  und den einfachen Spiegelungen  $s \in S$ . Die folgende Definition ist üblich:

DEFINITION 3.9 (vgl. z. B. [RS93], § 2.1). Sei  $\alpha \in \Pi$  eine einfache Wurzel, sei  $s = s_\alpha \in S$  die zugehörige einfache Spiegelung, sei  $\mathcal{O} \in V$  eine Bahn, und sei  $a := \phi(\mathcal{O}) \in \mathcal{I}$  die zugehörige Involution. Die Wurzel  $\alpha$  (und die Spiegelung  $s = s_\alpha$ ) heiße

- (a) imaginär (bzgl.  $\mathcal{O}$  oder  $a$ ) falls  $a(\alpha) = \alpha$ ,
- (b) reell, falls  $a(\alpha) = -\alpha$ ,
- (c) komplex sonst.

Es folgt die Tabelle mit den verschiedenen Möglichkeiten, die man für  $K_{\text{St}} \subset G_{\text{St}}$  erhalten kann, wenn man eine Nachbarschaft  $KxP_s/B$  untersucht (vgl. [RS93], §2 und [Vog83], Lemma 5.1). Bei jeder Möglichkeit werden die Bahnen von  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}} \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  aufgelistet, zusammen mit der Beziehung zwischen  $s$  und der entsprechenden Bahn  $\mathcal{O} \subset KxP_s/B$  nach Definition 3.9. Außerdem werden weitere Informationen über  $a := \phi(\mathcal{O})$  angegeben, die danach erklärt werden.

$K_{\text{St}}$	$T_{\text{St}}$			$N(T_{\text{St}})$		$B_{\text{St}}$		$G_{\text{St}}$
Bahnen von $K_{\text{St}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$	{0}	$\mathbb{C}^\times$	{ $\infty$ }	{0, $\infty$ }	$\mathbb{C}^\times$	{ $\infty$ }	$\mathbb{C}$	$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$
Wurzelart	imag.	reell	imag.	imag.	reell	kplx	kplx	imag.
$sa \gtrsim a$	>	<	>	>	<	>	<	>
$sa \not\gtrsim a$	$sa = as$			$sa = as$		$sa \neq as$		$sa = as$

Wir halten wieder eine einfache Spiegelung  $s$  und eine Bahn  $\mathcal{O}$  fest. Welche Spalte der Tabelle vorliegt (d. h. insbesondere auch welche der Bahnen von  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  der Bahn  $\mathcal{O}$  entspricht) wollen wir möglichst genau anhand von  $a := \phi(\mathcal{O})$  bestimmen. Der folgende Satz ist eine Zusammenfassung von mehreren Ergebnissen aus [RS93] und [RS90]. Er macht die Aussagen, die in den letzten beiden Zeilen der Tabelle stehen.

SATZ 3.10. Sei  $\mathcal{O} \in V$  eine Bahn und  $s \in S$  eine einfache Spiegelung. Sei  $a := \phi(\mathcal{O})$ .

- (a)  $sa < a$  genau dann, wenn  $\mathcal{O}$  die große (d. h. offene) Bahn in  $\mathcal{O}P_s$  ist und nicht der Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  vorliegt.
- (b)  $sa \neq as$  genau dann, wenn  $s$  komplex bezüglich  $a$  ist, d. h. wenn der Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  vorliegt.

Bemerkung: Wir können nun anhand von  $s$  und  $a$  zwischen den meisten Spalten der Tabelle unterscheiden. In Abschnitt 3.11 werden wir noch eine Möglichkeit angeben, zwischen den Fällen  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  und  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$  zu unterscheiden, allerdings nicht durch bloßes Rechnen in  $\mathcal{I}$ .

Jetzt bleibt noch eine weitere Frage: Wie kann man für eine Bahn  $\mathcal{O} \in V$  aus  $\phi(\mathcal{O})$  die Nachbarn von  $\mathcal{O}$  bestimmen (oder zumindest die Bilder der Nachbarn unter  $\phi$ )? Dazu zunächst ein Lemma und eine Definition.

LEMMA 3.11 (vgl. [RS93], Lemma 1.4.1). *Sei  $a \in \mathcal{I}$  eine Involution und  $s \in S$  eine einfache Spiegelung. Dann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:*

- (a)  $sa = as$ . Dann ist  $sa \in \mathcal{I}$ .
- (b)  $sa \neq as$ . Dann ist  $sas \in \mathcal{I}$ , und  $a$  und  $sas$  sind bezüglich der Bruhat-Ordnung vergleichbar (d.h. es gilt  $a < sas$  oder  $a > sas$ ).

Die einzige nichttriviale Aussage dieses Lemmas ist die Vergleichbarkeit von  $a$  und  $sas$ .

DEFINITION 3.12. *Für eine einfache Spiegelung  $s \in S$  sei die Abbildung  $\eta_s: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  definiert durch:*

$$\eta_s(a) = \begin{cases} sas & \text{falls } sa \neq as \quad (\Leftrightarrow s \text{ komplex bzgl. } a) \\ sa & \text{falls } sa = as. \end{cases}$$

*Bemerkung:* Das Lemma besagt, dass  $\eta_s(a) \in \mathcal{I}$  ist. Man rechnet außerdem leicht nach (wenn man möchte), dass  $\eta_s$  eine fixpunktfreie Involution auf  $\mathcal{I}$  ist.

Ein wichtiges Resultat aus [RS90] (und [RS93]) ist nun:

SATZ 3.13 (vgl. [RS93], Prop. 3.3.3). *Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung, und seien  $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in V$   $s$ -benachbart. Sei genau eine der Bahnen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  groß. (Insbesondere liegt also nicht der Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  vor.) Dann gilt  $\phi(\mathcal{O}) = \eta_s \phi(\mathcal{O}')$ , und  $\mathcal{O}'$  ist genau dann die große Bahn, wenn  $\phi(\mathcal{O}') > \phi(\mathcal{O})$  ist.*

Dieser Satz sagt also, dass  $\eta_s$  im Wesentlichen ein Äquivalent zu „ist  $s$ -Nachbar von“ auf den Involutionsen  $\mathcal{I}$  ist und dass die Bruhat-Ordnung auf  $\mathcal{I}$  angibt, welches der große Nachbar ist. Man sieht allerdings auch gleich zwei Einschränkungen für das Berechnen der Bahn-Nachbarschaften mit den Daten aus  $\mathcal{I}$ :

Im Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  hat die (einzige) Bahn  $\mathcal{O}$  keinen  $s$ -Nachbarn. In diesem Fall  $\eta_s(\phi(\mathcal{O}))$  irgend etwas Nutzloses. Wenn man eine Bahn  $\mathcal{O}$  und eine einfache Spiegelung  $s$  hat mit  $s\phi(\mathcal{O}) = \phi(\mathcal{O})s$  und  $s\phi(\mathcal{O}) > \phi(\mathcal{O})$ , weiß man nicht, ob dieser Fall vorliegt.

Im Fall  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  hat die große Bahn  $\mathcal{O}$  zwei kleine Nachbarn. Also haben offenbar beide Nachbarn das gleiche Bild:  $\eta_s(\phi(\mathcal{O}))$ . Hier sieht man, dass  $\phi$  im Allgemeinen nicht injektiv sein kann.

*Bemerkung:* Der Nachsatz von Satz 3.13 (der aussagt, welche der Bahnen die große ist), folgt in den Fällen  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  und  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$  direkt aus Satz 3.10 (a) und im Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  indirekt unter Zuhilfenahme von Lemma 3.11.

Analog zu den Bahnen wollen wir auch auf  $\mathcal{I}$  „Nachbarschaft“ definieren:

**DEFINITION 3.14.** *Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung und  $a \in \mathcal{I}$  eine Involution. Die Menge  $\{a, \eta_s(a)\}$  heiße  $s$ -Nachbarschaft von  $a$  (und von  $\eta_s(a)$ ). Wenn  $a > \eta_s(a)$  ist, heiße  $a$  groß (bzgl.  $s$ ).*

Zum Abschluss noch eine Notation, die es uns erlauben wird, Nachbarschaftsdiagramme zu zeichnen:

*Notation (vgl. [RS93], §3):*

- (a) Wenn  $\mathcal{O}'$  der große  $s$ -Nachbar von  $\mathcal{O}$  ist und  $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}'$ , schreibe  $\mathcal{O} \xrightarrow{s} \mathcal{O}'$ .
- (b) Wenn wir zusätzlich sagen wollen, welcher  $K_{\text{St}}$ -Fall vorliegt, schreiben wir  $\mathcal{O} \xrightarrow{\overset{s}{\mathbb{T}}} \mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O} \xrightarrow{\overset{s}{\mathbb{N}}} \mathcal{O}'$  oder  $\mathcal{O} \xrightarrow{\overset{s}{\mathbb{B}}} \mathcal{O}'$  falls  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  bzw.  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$  bzw.  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  ist.
- (c) Wenn  $a'$  der große  $s$ -Nachbar von  $a$  ist und  $a \neq a'$ , schreibe  $a \xrightarrow{s} a'$ .
- (d) Wenn wir zusätzlich sagen wollen, ob  $sa = as$  ist oder nicht, schreiben wir  $a \xrightarrow{\overset{s}{\ast}} a'$  falls  $sa = as$  ist und  $a \xrightarrow{\overset{s}{\mathbb{B}}} a'$  falls  $sa \neq as$  ist. ( $a \xrightarrow{\overset{s}{\mathbb{B}}} a'$  bedeutet also gerade, dass bei den Nachbarschaften der zugehörigen Bahnen der Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  vorliegt.)

### 3.6 Die nützlichen Nachbarschaften in $\mathcal{I}$ im Fall $\text{SO}_{2n}$

Wir können jetzt Information über Nachbarschaften von Bahnen aus Nachbarschaften von Involutionsen aus  $\mathcal{I}$  gewinnen, also untersuchen wir in diesem Abschnitt solche Nachbarschaften im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall. Da wir später nur an den nützlichen perversen Garben interessiert sein werden und diese nur auf einer Teilmenge der Bahnen leben (auf den *nützlichen* Bahnen), untersuchen wir in diesem Abschnitt nur die Involutionsen, die diesen Bahnen entsprechen. Diese *nützlichen* Involutionsen sind:

**DEFINITION 3.15.** *Im Fall  $G = \text{SO}_{2n}$  sei  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{I}$  die Menge der nützlichen Involutionsen, wobei*

$$a_i := |\bar{1}| \dots |\bar{i-1}|i|\bar{i+1}| \dots |\bar{n-1}|n|.$$

*Bemerkung:* Damit überhaupt Elemente von  ${}^{\Gamma}W \setminus W$  definiert werden, muss die Parität der Anzahl der Querstriche stimmen: Falls  $n$  gerade ist, ist  ${}^{\Gamma}G \cong \mathrm{O}_{2n}$  und die Anzahl der Querstriche ungerade, ansonsten ist  ${}^{\Gamma}G \cong \mathrm{SO}_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und die Anzahl der Querstriche gerade.

*Bemerkung:*  $a_n = w_0 y$ ; das ist, wie in Lemma 3.7 festgestellt, das Bild der offenen Bahn unter  $\phi$ .

*Notation:* Eine Nachbarschaft nennen wir *nützlich*, wenn alle ihre Elemente nützlich sind. Wenn nur ein Teil Elemente nützlich sind, nennen wir die Nachbarschaft *seminützlich*<sup>1</sup>. Das bezieht sich in diesem Abschnitt nur auf die Involutionen, aber später auch auf alles andere, bei dem wir von Nachbarschaften reden.

Wir berechnen nun alle nützlichen und seminützlichen Nachbarschaften von Involutionen (d. h. für  $1 \leq i \leq n$  und alle  $s \in S$  die Bilder  $\eta_s(a_i)$ ). Weil diese Nachbarschaftsrechnungen viel umständlicher aufzuschreiben als selbst zu rechnen sind, hier nur als Beispiel die  $s_1$ -Nachbarschaft von  $a_1$ .

$$\begin{aligned} s_1 a_1 &= |2|\bar{1}|\bar{3}| \dots |\overline{n-1}|\bar{n}| \\ a_1 s_1 &= |\bar{2}|1|\bar{3}| \dots |\overline{n-1}|\bar{n}| \end{aligned}$$

Diese Elemente sind verschieden, also ist  $K_{\mathrm{St}} \cong B_{\mathrm{St}}$  ( $s_1$  ist komplex bezüglich  $a_1$ ), und wir haben

$$\eta_{s_1}(a_1) = s_1 a_1 s_1 = |\bar{1}|2|\bar{3}| \dots |\overline{n-1}|\bar{n}| = a_2.$$

Vergleich der Längen von  $a_1 y$  und  $a_2 y$  liefert  $a_1 y < a_2 y$  und damit  $a_1 < a_2$ , also ist  $a_2$  der große Nachbar in dieser Nachbarschaft:

$$a_1 \xrightarrow{s_1} a_2.$$

Analog erhält man die restlichen nützlichen Nachbarschaften:

$$\begin{aligned} a_i &\xrightarrow{s_i} a_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{und} \\ a_{n-1} &\xrightarrow{s_n} a_n. \end{aligned}$$

Die seminützlichen Nachbarschaften haben, wie man leicht nachrechnet, alle die Form

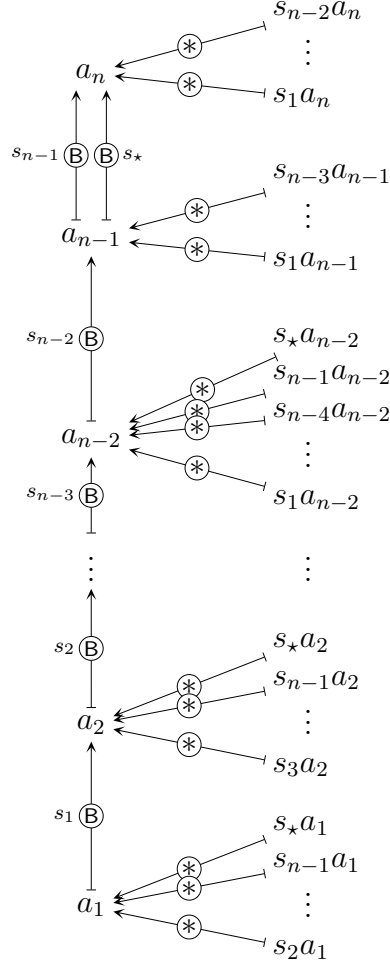
$$s_j a_i \xrightarrow{s_j} a_i$$

(wobei  $j$  auch  $\star$  sein kann), d. h.  $a_i$  ist großer Nachbar, und wir sind in einem Fall mit  $K_{\mathrm{St}} \not\cong B_{\mathrm{St}}$ .

---

<sup>1</sup>Vielleicht wäre „ärgerlich“ treffender, weil wir am liebsten keine solchen Nachbarschaften hätten, aber „seminützlich“ ist intuitiver.

Das Ergebnis zusammengefasst:



(Die senkrechten Pfeile sind die nützlichen Nachbarschaften, die mehr oder weniger waagrechten die seminützlichen.)

### 3.7 Die nützlichen Nachbarschaften in $\mathcal{I}$ im Fall $\text{SP}_{2n}$

Die *nützlichen Involutionen* im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall sind:

DEFINITION 3.16. *Im Fall  $G = \text{SP}_{2n}$  sei  $\{a_1, \dots, a_n, a_\infty\} \subset \mathcal{I}$  die Menge der nützlichen Involutionen, wobei*

$$a_i := |\bar{1}| \dots |\bar{i-1}| \bar{i} |\bar{i+1}| \dots |\bar{n}| \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \text{ und}$$

$$a_\infty := |\bar{1}| \dots |\bar{n}| = w_0 y.$$

Bei den  $s_1$ - bis  $s_{n-1}$ -Nachbarschaften von  $a_1$  bis  $a_n$  ist alles genauso wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall (sowohl bei den nützlichen als auch bei den seminützlichen). Hinzu kommen die Nachbarschaften von  $a_\infty$  und alle

$s_\star$ -Nachbarschaften. Die nützlichen Nachbarschaften sind:

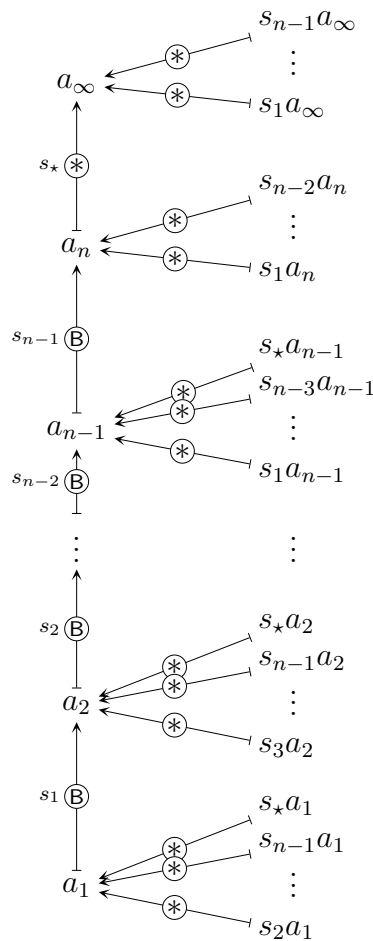
$$a_i \xrightarrow{s_i \textcircled{B}} a_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1$$

$$a_n \xrightarrow{s_\star \textcircled{*}} a_\infty ;$$

die seminützlichen haben wieder alle die Form

$$s_j a_i \xrightarrow{s_j \textcircled{*}} a_i .$$

Auch hier wieder das Ergebnis als Diagramm:



### 3.8 Die nützlichen Bahnen im Fall $SO_{2n}$

Wir wollen nun die Urbilder der  $a_i$  unter  $\phi$  bestimmen – zunächst wieder im  $SO_{2n}$ -Fall.

LEMMA 3.17. Die  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) haben jeweils genau ein Urbild unter  $\phi$ .

Wir können dann definieren:

DEFINITION 3.18. Sei  $\mathcal{O}_i$  das Urbild von  $a_i$  unter  $\phi$ . Die Menge der nützlichen Bahnen sei  $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\} \subset V$ .

*Beweis (des Lemmas):* Sei  $1 \leq i \leq n-1$ . Die  $s_i$ -Nachbarschaft einer Bahn  $\mathcal{O} \in \phi^{-1}(a_i)$  ist ein  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$ -Fall, also hat  $\mathcal{O}$  genau einen  $s_i$ -Nachbarn  $\mathcal{O}'$ , und es gilt  $\phi(\mathcal{O}') = a_{i+1}$ . Umgekehrt hat auch jede Bahn  $\mathcal{O}' \in \phi^{-1}(a_{i+1})$  genau einen  $s_i$ -Nachbarn  $\mathcal{O} \in \phi^{-1}(a_i)$ . Beides zusammen liefert: Die  $s_i$ -Nachbarschaftsbeziehung induziert eine Bijektion zwischen  $\phi^{-1}(a_i)$  und  $\phi^{-1}(a_{i+1})$ .

Nach Lemma 3.7 hat  $a_n = w_0 y$  genau ein Urbild unter  $\phi$ . Mit den Bijektionen erhält man induktiv jeweils genau ein Urbild von  $a_i$  für  $i < n$ .  $\square$

Beim Beweis des Lemmas haben wir bereits die nützlichen Nachbarschaften der Bahnen kennengelernt. Wir werfen nun noch einen Blick auf die seminützlichen Nachbarschaften: Wir haben gesehen, dass es da nur den Fall  $s_j a_i \xrightarrow{s_j} a_i$  gibt. Aus Satz 3.10, Teil (a) folgt, dass  $\mathcal{O}_i$  groß in der  $s_j$ -Nachbarschaft ist und dass nicht der Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  vorliegt. Aus Teil (b) folgt, dass der Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  auch nicht vorliegt. Bleiben die Fälle  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  und  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$ . Wir haben also gezeigt:

SATZ 3.19. Im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall sind die nützlichen Nachbarschaften der Bahnen

$$\mathcal{O}_1 \xrightarrow{s_1} \mathcal{O}_2 \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_{n-2}} \mathcal{O}_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} \mathcal{O}_n.$$

Alle seminützlichen Nachbarschaften haben die Form  $\mathcal{O} \xrightarrow{s_j} \mathcal{O}_i$  oder  $\mathcal{O} \xrightarrow{s_j} \mathcal{O}_i$ .

### 3.9 Die nützlichen Bahnen im Fall $\text{SP}_{2n}$

Auch im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall hat  $a_\infty$  genau ein Urbild unter  $\phi$ . Allerdings ist  $s_\star a_\infty = a_\infty s_\star$ , d. h. für die  $s_\star$ -Nachbarschaft vom Urbild  $\mathcal{O}_{\text{max}}$  gilt entweder  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  oder  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$ . Da wir erst später lernen werden, wie man zwischen diesen beiden Fällen unterscheiden kann, greifen wir hier ein bisschen voraus: In Lemma 3.30 werden wir sehen, dass die  $s_\star$ -Nachbarschaft von  $\mathcal{O}_{\text{max}}$  ein  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$ -Fall ist.

Die Nachbarschaften zwischen  $a_i$  und  $a_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) liefern wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall Bijektionen zwischen  $\phi^{-1}(a_i)$  und  $\phi^{-1}(a_{i+1})$ . Wir definieren jetzt auch im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall die nützlichen Bahnen:

- DEFINITION 3.20. (a) Sei  $\mathcal{O}_\infty := \mathcal{O}_{\text{max}}$  das einzige Urbild von  $a_\infty$ .  
 (b) Seien  $\mathcal{O}_n$  und  $\mathcal{O}_{-n}$  die beiden kleinen  $s_\star$ -Nachbarn von  $\mathcal{O}_\infty$ .  
 (c) Sei induktiv  $\mathcal{O}_i$  bzw.  $\mathcal{O}_{-i}$  der kleine  $s_i$ -Nachbar von  $\mathcal{O}_{i+1}$  bzw.  $\mathcal{O}_{-i-1}$ .

(d) Die Menge der nützlichen Bahnen sei

$$\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n, \mathcal{O}_{-1}, \dots, \mathcal{O}_{-n}, \mathcal{O}_\infty\}.$$

*Bemerkung:* Wir haben nicht gezeigt, dass  $\mathcal{O}_i$  und  $\mathcal{O}_{-i}$  die einzigen Urbilder von  $a_i$  sind. Theoretisch könnte es Bahnen  $\mathcal{O} \in \phi^{-1}(a_n)$  geben, bei deren  $s_*$ -Nachbarschaft der Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  vorliegt. Solche Bahnen interessieren uns jedoch nicht.

Wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall liegt auch hier wieder bei allen seminützlichen Nachbarschaften einer der Fälle  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  oder  $K_{\text{St}} \cong \text{N}(T_{\text{St}})$  vor.

**SATZ 3.21.** *Im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall sind die nützlichen Nachbarschaften der Bahnen*

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}_1 \xrightarrow{s_1} \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{O}_2 \xrightarrow{s_2} \mathbb{B} \rightarrow \dots \xrightarrow{s_{n-1}} \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{O}_n \xrightarrow{s_*} \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_\infty \\ \mathcal{O}_{-1} \xrightarrow{s_1} \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{O}_{-2} \xrightarrow{s_2} \mathbb{B} \rightarrow \dots \xrightarrow{s_{n-1}} \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{O}_{-n} \xrightarrow{s_*} \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_\infty \end{array}$$

Alle seminützlichen Nachbarschaften haben die Form  $\mathcal{O} \xrightarrow{s_j} \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_i$  oder  $\mathcal{O} \xrightarrow{s_j} \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_i$ .

### 3.10 Äquivariante lokale Systeme auf $G/B$

Erinnerung: In [LV83] wird ein Modul  $M$  der Hecke-Algebra  $(W, S)$  definiert, der als  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Basis die Menge  $\mathcal{D}$  hat, und  $\mathcal{D}$  ist die Menge der  $\delta_{\mathcal{O}, \gamma}$  für eine Bahn  $\mathcal{O}$  und ein äquivariantes lokales System  $\gamma$  darauf. Wir wollen einen Untermodul  $M_{\text{nütz}} \subset M$  konstruieren; dieser wird als  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Basis eine Teilmenge  $\mathcal{D}_{\text{nütz}} \subset \mathcal{D}$  haben.

In den vorigen Abschnitten haben wir die nützlichen Bahnen gefunden; als nächstes bestimmen wir auf diesen Bahnen die äquivarianten lokalen Systeme und wählen davon die nützlichen aus. Um die Menge der äquivarianten lokalen Systeme auf einer Bahn bestimmen zu können, zunächst ein paar Definitionen:

**DEFINITION 3.22.** *Sei  $\mathcal{O} \in V$  eine Bahn, und sei  $x \in G$  ein Repräsentant von  $\mathcal{O}$ , für den  $\kappa(x) = x^{-1}yx \in {}^\Gamma\text{N}(T)$  gilt. Wir definieren:*

- (a) (Erinnerung:)  $K_x := x^{-1}Kx = Z_G(\kappa(x))$ .
- (b)  $I_x \subset K$  sei der Stabilisator von  $xB \in \mathcal{O}$ .
- (c)  $T_{\mathcal{O}} := T_{\phi(\mathcal{O})} := K_x \cap T$ .
- (d)  $A_{\mathcal{O}} := A_{\phi(\mathcal{O})} := T_{\mathcal{O}}/T_{\mathcal{O}}^0$  (die Komponentengruppe von  $T_{\mathcal{O}}$ ).
- (e)  $\Gamma_{\mathcal{O}}$  sei die Menge der Charaktere von  $A_{\mathcal{O}}$ .

*Bemerkung:* In Abschnitt 3.4 hatten wir beliebige Repräsentanten einer Bahn  $\mathcal{O}$  zugelassen, um damit  $K_x$  zu definieren. Ab diesem Abschnitt arbeiten wir nur noch mit Repräsentanten  $x$ , die  $\kappa(x) \in {}^\Gamma\text{N}(T)$  erfüllen. Dadurch gilt die folgende Formel, die zeigt, dass die Definition von  $T_{\mathcal{O}}$  tatsächlich nur von  $\phi(\mathcal{O})$  abhängt:

$$T_{\mathcal{O}} = K_x \cap T = \{t \in T \mid \kappa(x)t\kappa(x)^{-1} = t\} = \{t \in T \mid \phi(\mathcal{O})(t) = t\}.$$

Die äquivarianten lokalen Systeme auf einer Bahn  $\mathcal{O}$  entsprechen kanonisch den Charakteren von  $I_x/I_x^0$ . Wir wollen also diese Gruppen untersuchen. Dazu das folgende Lemma:

LEMMA 3.23 (vgl. Lemma 7.2.1 in [RS93]). (a) *Das semi-direkte Produkt  $B \cong U \rtimes T$  lässt sich einschränken zu  $K_x \cap B \cong (K_x \cap U) \rtimes (K_x \cap T)$ .*  
(b)  $I_x/I_x^0 \cong A_{\mathcal{O}}$ .

*Beweis:* (a) Sei  $\theta := \text{Int}(\kappa(x))$ . Es gilt:  $K_x = \{y \in G \mid \theta(y) = y\}$ . Wegen  $\kappa(x) \in {}^{\Gamma}\text{N}(T)$  ist  $\theta(T) = T$ , und  $B' := \theta(B)$  ist eine Borelsche, die  $T$  enthält. Sei  $U' := \theta(U)$  das unipotente Radikal von  $B'$ .

Sei  $b \in K_x \cap B$  und  $b = ut$  die Zerlegung von  $b$  bzgl.  $B = U \rtimes T$ . Wenn wir gezeigt haben, dass  $u$  und  $t$  in  $K_x$  liegen, sind wir fertig. Dazu ist zu zeigen:  $u = \theta(u)$  und  $t = \theta(t)$ .

Wegen  $b \in K_x$  haben wir  $b = \theta(b) = \theta(u)\theta(t)$ . Wir wissen bereits, dass  $\theta(t)$  in  $T$  liegt.  $\theta(u)$  liegt im unipotenten Radikal  $U'$ ; außerdem ist  $\theta(u) = b\theta(t)^{-1} \in B$ . Daraus folgt  $\theta(u) \in U$ .

Damit ist  $b = \theta(u)\theta(t)$  eine weitere Zerlegung von  $b$  bzgl.  $B = U \rtimes T$ . Da eine solche Zerlegung eindeutig ist, folgt  $u = \theta(u)$  und  $t = \theta(t)$ .

(b) Man rechnet nach, dass  $x^{-1}I_x x = K_x \cap B$  ist. Da  $K_x \cap U$  unipotent und damit zusammenhängend ist, folgt aus (a):  $I_x/I_x^0 \cong (K_x \cap T)/(K_x \cap T)^0 = A_{\mathcal{O}}$ . □

Die äquivarianten lokalen Systeme auf  $\mathcal{O}$  stehen also in Bijektion zu  $\Gamma_{\mathcal{O}}$ .

*Notation:* Für eine Bahn  $\mathcal{O}$  und ein äquivariantes lokales System  $\chi$  auf  $\mathcal{O}$  schreiben wir statt  $\delta_{\mathcal{O},\gamma}$  auch  $\delta_{\mathcal{O},\chi}$ , wenn  $\chi \in \Gamma_{\mathcal{O}}$  der Charakter ist, der  $\gamma$  entspricht.

Wir werden die Gruppen  $A_{\mathcal{O}}$  für die nützlichen Bahnen explizit berechnen. Vorher dehnen wir aber noch die Definition von Nachbarschaften auf äquivariante lokale Systeme aus.

### 3.11 Nachbarschaften in der Basis $\mathcal{D}$

In diesem Abschnitt definieren wir auf geometrische Art eine Nachbarschaftsbeziehung zwischen Elementen der (zukünftigen) Basis  $\mathcal{D}$  des Hecke-Moduls  $M$ . Daraus wird sich später die Operation der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}$  auf  $M$  ergeben. Danach geben wir an, wie man diese Nachbarschaftsbeziehung explizit berechnen kann, wenn man die äquivarianten lokalen Systeme wie im vorigen Abschnitt durch Charaktere der Gruppen  $A_{\mathcal{O}}$  gegeben hat.

DEFINITION 3.24. *Sei  $s$  eine einfache Spiegelung,  $P_s$  die zugehörige Parabolische,  $(\mathcal{O}_{\nu})_{\nu \in I}$  eine  $s$ -Nachbarschaft von Bahnen,  $X = \cup_{\nu \in I} \mathcal{O}_{\nu}$  die Vereinigung, und seien  $\iota_{\nu}: \mathcal{O}_{\nu} \hookrightarrow X$  die Inklusionen. Sei  $\tilde{\gamma}$  ein*

äquivariantes lokales System auf  $X$ , und sei  $\gamma_\nu := \iota_\nu^* \bar{\gamma}$  die Einschränkungen von  $\bar{\gamma}$  auf die Bahn  $\mathcal{O}_\nu$  für  $\nu \in I$ .

(a) Eine  $s$ -Nachbarschaft in  $\mathcal{D}$  ist eine Menge der Form

$$\{\delta_{\mathcal{O}_\nu, \gamma_\nu} \mid \nu \in I\} .$$

(b) Wenn  $\mathcal{O}_\nu$  die große Bahn ist, heiße  $\delta_{\mathcal{O}_\nu, \gamma_\nu}$  großer  $s$ -Nachbar dieser Nachbarschaft.

(c) Wenn  $\delta, \delta' \in \mathcal{D}$ ,  $\delta \neq \delta'$  in einer  $s$ -Nachbarschaft liegen und  $\delta'$  der große Nachbar dieser Nachbarschaft ist, schreiben wir  $\delta \xrightarrow{s} \delta'$ .

*Bemerkung:* Für festes  $s$  bilden die  $s$ -Nachbarschaften der Bahnen eine disjunkte Zerlegung der Menge aller Bahnen. Dies ist bei den äquivarianten lokalen Systemen nicht der Fall: Ein lokales System kann sowohl in mehreren als auch in gar keiner  $s$ -Nachbarschaft liegen.

Wie man Nachbarschaften bei äquivarianten lokalen Systemen berechnet, wird in [RS93], §7 beschrieben. (Dort heißen sie allerdings nicht so.) Im Rest des Abschnitts geben wir von dieser Beschreibung so viel wieder, wie wir benötigen werden.

Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung und  $\alpha \in \Pi$  die zugehörige einfache Wurzel. Sei  $\mathcal{O}' \in V$  groß in seiner  $s$ -Nachbarschaft, und sei  $a' := \phi(\mathcal{O}') \in \mathcal{I}$ . Wenn nicht der Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$  vorliegt, sei außerdem  $\mathcal{O}$  ein kleiner  $s$ -Nachbar von  $\mathcal{O}'$  und  $a := \phi(\mathcal{O})$ . Wir machen eine Fallunterscheidung danach, wie die Nachbarschaft  $\mathcal{O}'P_s$  aussieht.

Fall  $K_{\text{St}} \cong G_{\text{St}}$ : Jedes  $\delta_{\mathcal{O}', \chi}$  (mit  $\chi \in \Gamma_{\mathcal{O}'}$ ) bildet für sich allein eine  $s$ -Nachbarschaft  $\{\delta_{\mathcal{O}', \chi}\}$ .

Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$ : Wir haben einen Isomorphismus

$$(5) \quad \begin{aligned} T_a &\longrightarrow T_{a'} = T_{sas} \\ t &\longmapsto s(t), \end{aligned}$$

der einen Isomorphismus  $A_a \cong A_{a'}$  induziert. Der wiederum induziert einen Isomorphismus der Charaktergruppen  $\Gamma_{a'} \xrightarrow{\sim} \Gamma_a$ . Die Nachbarschaften von äquivarianten lokalen Systemen sind von der Form  $\{\delta_{\mathcal{O}, \chi}, \delta_{\mathcal{O}', \chi'}\}$ , wobei  $\chi$  das Bild von  $\chi'$  unter diesem Isomorphismus ist.

Fälle  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  und  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$ : Wir wollen  $\Gamma_{a'}$  mit  $\Gamma_a$  in Beziehung setzen. Das geht in zwei Schritten:

1. Definiere  $T_{\text{Mitte}} := T_{a'} \cap \ker(\alpha)$  und  $A_{\text{Mitte}} := T_{\text{Mitte}}/T_{\text{Mitte}}^0$ . Aus  $\alpha$  reell bezüglich  $a'$  folgt (nach kurzer Rechnung)  $\alpha(T_{a'}) \subset \{\pm 1\}$ . Also ist  $T_{\text{Mitte}}^0 = T_{a'}^0$ , und die Abbildung  $\rho_1: A_{\text{Mitte}} \longrightarrow A_{a'}$  ist eine Inklusion. Damit haben wir eine Einschrnkungsabbildung von  $\Gamma_{a'}$  in die Charaktere  $\Gamma_{\text{Mitte}}$  von  $A_{\text{Mitte}}$ .

Der Grad  $(A_{a'} : A_{\text{Mitte}})$  kann 1 oder 2 sein (je nachdem, ob  $\alpha(T_{a'}) = \{1\}$  oder  $\{\pm 1\}$  ist); diese Fälle entsprechen den möglichen Gruppen  $K_{\text{St}}$ :

LEMMA 3.25 ([RS93], 7.2.4).  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}} \Leftrightarrow A_{\text{Mitte}} = A_{a'} (\Leftrightarrow \alpha(T_{a'}) = \{1\})$ .

2. Man rechnet nach, dass  $T_{\text{Mitte}} \subset T_a$  ist. Das liefert eine Abbildung  $\rho_2: A_{\text{Mitte}} \rightarrow A_a$ .

Aus  $\alpha$  reell bezüglich  $a'$  folgt, dass  $\alpha^\vee(-1)$  in  $T_{a'}$  liegt. Damit hat man eine (ein- oder zweielementige) Untergruppe

$$\eta(\alpha^\vee) := \alpha^\vee(\pm 1) \cdot T_{a'}^0 \subset A_{a'}.$$

Wegen  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  gilt sogar  $\eta(\alpha^\vee) \subset A_{\text{Mitte}}$ . In [RS93] wird gezeigt:

LEMMA 3.26 (Vgl. [RS93], 7.2.3). *Man hat eine kurze exakte Sequenz*

$$\eta(\alpha^\vee) \hookrightarrow A_{\text{Mitte}} \xrightarrow{\rho_2} A_a.$$

Mit Schritt 1 und 2 zusammen bekommen wir jetzt aus jedem Charakter  $\chi' \in \Gamma_{a'}$ , der auf  $\eta(\alpha^\vee)$  verschwindet, einen Charakter  $\chi \in \Gamma_a$ . Im Fall  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$  sind die  $s$ -Nachbarschaften Mengen der Form  $\{\delta_{\mathcal{O}, \chi}, \delta_{\mathcal{O}', \chi'}\}$ . Im Fall  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  gibt es zwei kleine Bahnen  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$ , und  $s$ -Nachbarschaften sind Mengen der Form  $\{\delta_{\mathcal{O}_1, \chi}, \delta_{\mathcal{O}_2, \chi}, \delta_{\mathcal{O}', \chi'}\}$ . Wenn ein Charakter  $\chi' \in \Gamma_{a'}$  nicht auf  $\eta(\alpha^\vee)$  verschwindet, liegt er in gar keiner  $s$ -Nachbarschaft.

*Bemerkung:* Im Fall  $K_{\text{St}} \cong N(T_{\text{St}})$  liegt jedes lokale System auf der kleinen Bahn in zwei  $s$ -Nachbarschaften, da bei der Einschränkung  $\Gamma_{a'} \rightarrow \Gamma_{\text{Mitte}}$  je zwei Charaktere auf einen abgebildet werden. Im Fall  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  liegt jedes lokale System auf der einer Bahn nur in einer  $s$ -Nachbarschaft.

### 3.12 Die Operation der Hecke-Algebra $\mathcal{H}$

Jetzt haben wir alles zusammen, um die Operation der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}$  auf  $M$  zu definieren. Zur Erinnerung:  $\mathcal{H}$  ist eine  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Algebra und wird von Elementen  $T_s$  für alle einfachen Spiegelungen  $s \in S$  erzeugt. (Zur Definition siehe z. B. [LV83].) Es reicht also, die Operation der Elemente  $T_s$  auf  $M$  anzugeben. Für unsere Zwecke ist es noch praktischer, statt der  $T_s$  die

$$C_s := T_s + 1$$

zu betrachten.

*Notation:* Für  $s_j \in S$  ( $j \in \{1, \dots, n-1, \star\}$ ) sei  $C_j := C_{s_j}$ .

Die „richtige“ Definition von  $C_s \delta_{\mathcal{O}, \gamma}$  sieht in etwa so aus (vgl. [LV83], Lemma 3.3): Sei  $\mathcal{F}$  die Ausdehnung von  $\gamma$  auf  $G/B$  durch 0, d. h. für die Inklusion  $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow G/B$  sei  $\mathcal{F} = \iota_! \gamma$ . Sei  $P_s$  die Parabolische zu  $s$ , und sei  $\pi: G/B \twoheadrightarrow G/P_s$  die Projektion. Betrachte die Jordan-Hölder-Reihe von  $H^p(\pi^* R\pi_* \mathcal{F})$  für  $p \in \mathbb{Z}$ ; sie besteht aus Garben der Form  $\iota'_! \gamma'$  für gewisse äquivariante lokale Systeme  $\gamma'$  auf Bahnen  $\mathcal{O}'$  mit

$\iota': \mathcal{O}' \hookrightarrow G/B$ .  $C_s \delta_{\mathcal{O}, \gamma}$  soll nun die Summe all dieser  $q^k \delta_{\mathcal{O}', \gamma'}$ , sein, und das auch noch alternierend für alle  $p$  aufsummiert. Dabei soll der Faktor  $q^k$  eigentlich angeben, wie der Frobenius operiert. In Charakteristik Null muss man statt dessen mit der gemischten Hodge-Struktur von Saito arbeiten.

Es folgt eine andere, äquivalente Definition, der man weniger ansieht, aber mit der man leichter rechnen kann:

**DEFINITION 3.27** (vgl. [RS93], 7.3). *Sei  $s \in S$  eine einfache Spiegelung und  $\delta \in \mathcal{D}$ . Wir definieren  $C_s \delta$  in Abhängigkeit davon, ob die Bahn von  $\delta$  klein oder groß in ihrer  $s$ -Nachbarschaft ist.*

(a) *Falls die Bahn von  $\delta$  klein ist:  $\delta$  kann in einer oder in zwei  $s$ -Nachbarschaften liegen. Sei(en)  $\{\delta_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l\}$  für  $j = 1$  (bzw.  $j = 1, 2$ ) diese  $s$ -Nachbarschaft(en). Definiere*

$$C_s \delta := \sum_{i,j} \delta_{i,j}.$$

(b) *Falls die Bahn von  $\delta$  groß ist: Wenn  $\delta$  in keiner  $s$ -Nachbarschaft liegt, definiere*

$$C_s \delta := 0.$$

*Ansonsten sei  $\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq l\}$  die  $s$ -Nachbarschaft von  $\delta$ . Definiere  $C_s \delta$  so, dass die folgende Formel gilt:*

$$\sum_i C_s \delta_i = (q+1) \sum_i \delta_i.$$

*(Das ist eine sinnvolle Definition, da auf der linken Seite  $\delta$  der einzige große Summand ist und wir  $C_s \delta_i$  für  $\delta_i$  klein bereits in (a) definiert haben.)*

*Bemerkung:* Wenn man die Nachbarschaften in  $\mathcal{D}$  als Graph darstellt (Elemente, die in einer gemeinsamen Nachbarschaft liegen, werden durch eine Kante verbunden), liegen alle Summanden von  $C_s \delta$  in derselben Zusammenhangskomponente wie  $\delta$ . Daraus folgt, dass diese Zusammenhangskomponenten eine Zerlegung von  $M$  in direkte Summanden liefern. Die nützlichen Elemente von  $\mathcal{D}$ , die wir in den folgenden Abschnitten auswählen werden, werden in diesem Sinne nicht mit dem Rest von  $\mathcal{D}$  zusammenhängen.

### 3.13 Die Basis $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$ im Fall $\text{SO}_{2n}$

Wir wählen nun auf jeder der Bahnen  $\mathcal{O}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) zwei äquivariante lokale Systeme  $\gamma_{\pm i}$  aus, indem wir zwei Charaktere von  $A_{\mathcal{O}_i}$  angeben. Diese äquivariante lokale Systeme liefern dann die nützlichen Basiselemente  $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$  für unseren Hecke-Modul  $M_{\text{nütz}}$ . Erst mal ein paar Notationen:

*Notation:* Sei  $T_i := T_{a_i} = \{t \in T \mid a_i(t) = t\}$ ,  $A_i := A_{a_i} = T_i/T_i^0$ , und sei  $\Gamma_i := \Gamma_{a_i}$  die Menge der Charaktere von  $A_i$ . Für Toruselemente  $t \in T$  führen wir die Notation  $[t_1, \dots, t_n] := e_1(t_1) \cdots e_n(t_n)$  ein.

Wir erinnern uns an die Definition der  $a_i$  und daran, wie solche Elemente auf dem Torus operieren:

$$a_i[t_1, \dots, t_n] = [t_1^{-1}, \dots, t_{i-1}^{-1}, t_i, t_{i+1}^{-1}, \dots, t_n^{-1}].$$

Das liefert:

$$T_i = \left\{ [\pm 1, \dots, \pm 1, \underset{i}{*}, \pm 1, \dots, \pm 1] \right\}$$

$$A_i \cong \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\} \times \{1\} \times \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\}.$$

Ein Charakter  $\chi \in \Gamma_i$  wird festgelegt durch die Bilder der Elemente  $(1, \dots, 1, \underset{j}{-1}, 1, \dots, 1) \in A_i$  für  $j \neq i$ .

*Notation:* Wir schreiben einen Charakter  $\chi \in \Gamma_i$  als Tupel

$$(b_1, \dots, b_{i-1}, \bullet, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

mit  $b_j = \chi(1, \dots, 1, \underset{j}{-1}, 1, \dots, 1)$  für  $j \neq i$ .

Die nützlichen Charaktere sind in dieser Notation die folgenden:

$$\chi_i := (1, -1, 1, \dots, \pm 1, \underset{i}{\bullet}, \mp 1, \dots) \in \Gamma_i$$

$$\chi_{-i} := (-1, 1, -1, \dots, \mp 1, \underset{i}{\bullet}, \pm 1, \dots) \in \Gamma_i.$$

Man beachte, dass die Vorzeichen vor und nach dem  $\bullet$  verschieden sind. Um vorzugreifen: Dass sich die  $\chi_i$  nur darin unterscheiden, wo der „ $\bullet$ “ ist, wird dazu führen, dass die  $\chi_i$  untereinander benachbart sind. Dass die Vorzeichen sich abwechseln, wird seminützliche Nachbarschaften verhindern.

Daraus ergibt sich jetzt die nützliche Basis:

**DEFINITION 3.28.** (a) Für  $i \in \{1, \dots, n, -1, \dots, -n\}$  sei  $\gamma_i$  das äquivariante lokale System auf  $\mathcal{O}_{|i|}$ , das zu  $\chi_i$  gehört und  $\delta_i := \delta_{\mathcal{O}_{|i|}, \gamma_i} \in \mathcal{D}$  das zugehörige Basiselement.  
 (b) Sei  $\mathcal{D}_{\text{nütz}} := \{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, n, -1, \dots, -n\}\} \subset \mathcal{D}$  die nützliche Basis.

### 3.14 Die Operation von $\mathcal{H}$ auf $M_{\text{nütz}}$ im Fall $\text{SO}_{2n}$

**DEFINITION 3.29.** Das Erzeugnis  $M_{\text{nütz}} := \langle \mathcal{D}_{\text{nütz}} \rangle_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]}$  sei der nützliche  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Untermodul von  $M$ .

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass  $M_{\text{nütz}}$  ein  $\mathcal{H}$ -Untermodul von  $M$  ist, und wir berechnen die Operation von  $\mathcal{H}$  auf  $M_{\text{nütz}}$ .

*Notation:*  $C_j := C_{s_j}$  für  $j \in \{1, \dots, n-1, \star\}$ .

Die Operation der  $C_s$  auf den  $\delta_i$  ergibt sich aus den Nachbarschaftsverhältnissen. Zunächst die nützlichen: Die Nachbarschaft  $\mathcal{O}_i \xrightarrow{s_i^*} \mathcal{O}_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  liefert nach (5) (Abschnitt 3.11) einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} T_i &\longrightarrow T_{i+1} \\ [t_1, \dots, t_n] &\longmapsto s_i[t_1, \dots, t_n] = [t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, t_i, t_{i+2}, \dots, t_n], \end{aligned}$$

und damit einen Isomorphismus  $\Gamma_{i+1} \xrightarrow{\sim} \Gamma_i$ , bei dem einfach nur der „ $\bullet$ “ verschoben wird. Daraus ergeben sich die  $s_i$ -Nachbarschaften  $\{\delta_i, \delta_{i+1}\}$  und  $\{\delta_{-i}, \delta_{-(i+1)}\}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ . Analog erhält man die  $s_\star$ -Nachbarschaften  $\{\delta_{n-1}, \delta_n\}$  und  $\{\delta_{-(n-1)}, \delta_{-n}\}$ . Für die Operation der  $C_i$  ergibt sich nach Definition 3.27

$$\begin{aligned} C_i \delta_{\pm i} &= \delta_{\pm i} + \delta_{\pm(i+1)} && \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \\ C_i \delta_{\pm(i+1)} &= q(\delta_{\pm i} + \delta_{\pm(i+1)}) && \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \\ C_\star \delta_{\pm(n-1)} &= \delta_{\pm(n-1)} + \delta_{\pm n} \\ C_\star \delta_{\pm n} &= q(\delta_{\pm(n-1)} + \delta_{\pm n}). \end{aligned}$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass die seminützlichen Nachbarschaften der Bahnen keine Nachbarschaften zwischen Elementen von  $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$  und  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\text{nütz}}$  liefern. In  $\mathcal{I}$  sind die seminützlichen Nachbarschaften  $s_j a_i \xrightarrow{s_j^*} a_i$  (für  $i \neq j, j+1$  falls  $j \neq \star$  und  $i \neq n-1, n$  falls  $j = \star$ ). Wir sind im Fall  $K_{\text{St}} \cong \text{N}(T_{\text{St}})$  oder  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$ , und  $\mathcal{O}_i$  ist die große Bahn. Nach Abschnitt 3.11 wollen wir zeigen, dass die Charaktere  $\chi_{\pm i}$  auf  $\eta(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee(\pm 1)T_i^0$  nicht verschwinden.

Wir haben:

$$\begin{aligned} \alpha_j^\vee(-1) &= [1, \dots, 1, \underset{j}{-1}, \underset{j+1}{-1}, 1, \dots, 1] \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-1, \\ \alpha_\star^\vee(-1) &= [1, \dots, 1, -1, -1]. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert (für  $i$  und  $j$  wie oben):  $\chi_{\pm i}(\alpha_j^\vee(-1)) = -1$ . Damit hat  $\delta_{\pm i}$  keine  $s_j$ -Nachbarn, und wir haben

$$C_j \delta_{\pm i} = 0.$$

Es gibt also überhaupt keine Nachbarschaften zwischen Elementen aus  $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$  und  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\text{nütz}}$ , und  $M_{\text{nütz}}$  ist (nach der Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.12) wie behauptet ein  $\mathcal{H}$ -Untermodul von  $M$ .

*Bemerkung:*  $M_{\text{nütz}}$  zerfällt selbst nochmal in eine direkte Summe aus zwei isomorphen Summanden:  $M_{\text{nütz}+} := \langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle$  und  $M_{\text{nütz}-} := \langle \delta_{-1}, \dots, \delta_{-n} \rangle$ .

### 3.15 Die Basis $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$ im Fall $\text{SP}_{2n}$

Im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall haben wir auf jeder Bahn zwei nützliche Charaktere gewählt. Im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall werden wir nur jeweils einen wählen; dafür liefern hier die meisten Charaktere zwei nützliche äquivariante lokale Systeme: eines auf  $\mathcal{O}_i$  und eines auf  $\mathcal{O}_{-i}$ . Wieder zunächst ein paar Notationen:

*Notation:* Für  $i \in \{1, \dots, n, \infty\}$  sei  $T_i := T_{a_i} = \{t \in T \mid a_i(t) = t\}$ ,  $A_i := A_{a_i} = T_i/T_i^0$  und  $\Gamma_i := \Gamma_{a_i}$  die Menge der Charaktere von  $A_i$ . Für Toruselemente benutzen wir weiterhin die Notation  $[t_1, \dots, t_n] := e_1(t_1) \cdots e_n(t_n)$ .

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} a_i[t_1, \dots, t_n] &= [t_1^{-1}, \dots, t_{i-1}^{-1}, t_i, t_{i+1}^{-1}, \dots, t_n^{-1}] && \text{für } 1 \leq i \leq n \\ a_\infty[t_1, \dots, t_n] &= [t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}] \\ T_i &= \left\{ [\pm 1, \dots, \pm 1, \underset{i}{*}, \pm 1, \dots, \pm 1] \right\} && \text{für } 1 \leq i \leq n \\ T_\infty &= \{[\pm 1, \dots, \pm 1]\} \\ A_i &\cong \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\} \times \underbrace{\{1\}}_i \times \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\} \\ &&& \text{für } 1 \leq i \leq n \\ A_\infty &\cong \{\pm 1\} \times \cdots \times \{\pm 1\} . \end{aligned}$$

In Abschnitt 3.9 hatten wir die Untersuchung, ob die  $s_\star$ -Nachbarschaft von  $\mathcal{O}_\infty$  ein  $T_{\text{St}}$ - oder ein  $N(T_{\text{St}})$ -Fall ist, auf später aufgeschoben. Jetzt können wir das mit Hilfe von Lemma 3.25 nachholen:

LEMMA 3.30. *Die  $s_\star$ -Nachbarschaft von  $\mathcal{O}_\infty$  ist ein  $T_{\text{St}}$ -Fall.*

*Beweis:* Zu zeigen ist nach Lemma 3.25, dass  $\alpha_\star(T_\infty) = \{1\}$  ist. Dies ist der Fall, da  $\alpha_\star = 2\varepsilon_n$  ist.  $\square$

Gut, zurück zu den Charakteren: Ein Charakter von  $A_i$  wird festgelegt durch die Bilder der Elemente

$$(1, \dots, 1, \underset{j}{-1}, 1, \dots, 1) \in A_i$$

für  $j \neq i$ , falls  $1 \leq i \leq n$  ist, und durch die Bilder all dieser Elemente, falls  $i = \infty$  ist.

*Notation:* Wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall schreiben wir einen Charakter  $\chi \in \Gamma_i$  als Tupel der Bilder  $\chi(1, \dots, 1, \underset{j}{-1}, 1, \dots, 1)$  für  $1 \leq j \leq n$ , wobei wir, falls  $i \neq \infty$  ist, an Stelle  $i$  ein „ $\bullet$ “ schreiben.

Die nützlichen Charaktere sehen im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall ähnlich aus wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall; allerdings müssen wir etwas genauer auf die Vorzeichen achten:

$$\chi_i := ((-1)^{n-1}, (-1)^{n-2}, \dots, (-1)^{n-i+1}, \underset{i}{\bullet}, (-1)^{n-i}, \dots, (-1)^2, (-1)^1)$$

für  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\chi_\infty := ((-1)^{n-1}, (-1)^{n-2}, \dots, (-1)^1, (-1)^0).$$

Auch hier ist das Vorzeichen vor und nach dem  $\bullet$  verschieden. Diesmal ist es außerdem wichtig, dass die Charaktere mit dem richtigen Vorzeichen enden.

Jetzt können wir wieder die nützliche Basis angeben:

**DEFINITION 3.31.** (a) Für  $1 \leq i \leq n$  sei  $\gamma_i$  bzw.  $\gamma_{-i}$  das äquivariante lokale System auf  $\mathcal{O}_i$  bzw.  $\mathcal{O}_{-i}$ , das zu  $\chi_i$  gehört.  $\gamma_\infty$  sei das äquivariante lokale System zu  $\chi_\infty$  auf  $\mathcal{O}_\infty$ . Seien  $\delta_i := \delta_{\mathcal{O}_i, \chi_i}$ ,  $\delta_{-i} := \delta_{\mathcal{O}_{-i}, \chi_i}$  und  $\delta_\infty := \delta_{\mathcal{O}_\infty, \chi_\infty}$  die zugehörigen Basiselemente.

(b) Sei  $\mathcal{D}_{\text{nütz}} := \{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, n, -1, \dots, -n, \infty\}\} \subset \mathcal{D}$  die nützliche Basis.

### 3.16 Die Operation von $\mathcal{H}$ auf $M_{\text{nütz}}$ im Fall $\text{SP}_{2n}$

**DEFINITION 3.32.** Das Erzeugnis  $M_{\text{nütz}} := \langle \mathcal{D}_{\text{nütz}} \rangle_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]}$  sei der nützliche  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Untermodul von  $M$ .

Wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall zeigen wir wieder, dass  $M_{\text{nütz}}$  ein  $\mathcal{H}$ -Untermodul von  $M$  ist und berechnen die Operation von  $\mathcal{H}$  auf  $M_{\text{nütz}}$ .

*Notation:*  $C_j := C_{s_j}$  für  $j \in \{1, \dots, n-1, \star\}$ .

Mit der gleichen Rechnung wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall erhalten wir  $s_i$ -Nachbarschaften  $\{\delta_i, \delta_{i+1}\}$  und  $\{\delta_{-i}, \delta_{-(i+1)}\}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ . Jetzt untersuchen wir die  $s_\star$ -Nachbarschaft von  $\chi_\infty$ . Dazu verwenden wir die Notationen aus Abschnitt 3.11. Wir haben schon im vorigen Abschnitt gesehen, dass  $\alpha_\star(T_\infty) = \{1\}$  ist; also ist  $T_{\text{Mitte}} = T_\infty \cap \ker \alpha_\star = T_\infty$ . Außerdem ist

$$\eta(\alpha_\star^\vee) = \alpha_\star^\vee(\pm 1)T_\infty^0 = (1, \dots, 1, \pm 1).$$

Da  $\chi_\infty$  auf 1 endet, ist  $\chi_\infty(\eta(\alpha_\star^\vee)) = \{1\}$ , d. h.  $\chi_\infty$  hat kleine Nachbarn. Anwenden der Abbildungen aus Abschnitt 3.11 liefert als Charakter der kleinen Nachbarn genau  $\chi_n$ ; wir haben also die Nachbarschaft  $\{\delta_n, \delta_{-n}, \delta_\infty\}$ .

Für die Operation der  $C_i$  bedeutet das:

$$\begin{aligned} C_i \delta_{\pm i} &= \delta_{\pm i} + \delta_{\pm(i+1)} && \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \\ C_i \delta_{\pm(i+1)} &= q(\delta_{\pm i} + \delta_{\pm(i+1)}) && \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \\ C_\star \delta_{\pm n} &= \delta_n + \delta_{-n} + \delta_\infty \\ C_\star \delta_\infty &= q(\delta_n + \delta_{-n} + \delta_\infty). \end{aligned}$$

Bleibt wieder zu zeigen, dass die seminützlichen Nachbarschaften der Bahnen keine Nachbarschaften auf den Charakteren liefern. Für die  $s_j$ -Nachbarschaften mit  $1 \leq j \leq n-1$  geht das genauso wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall (auch bei  $\delta_\infty$ ). Für die  $s_\star$ -Nachbarschaften setzt man  $\alpha_\star^\vee(-1) = [1, \dots, 1, -1]$  in  $\chi_i$  ein für  $1 \leq i \leq n-1$ . Da diese Charaktere auf  $-1$  enden, ist  $\chi_i(\eta(\alpha_\star^\vee)) = \chi_i(\alpha_\star^\vee(\pm 1)T_i) = \{\pm 1\}$ .  $\delta_{\pm i}$  liegt also in keiner  $s_\star$ -Nachbarschaft, und wir haben

$$C_\star \delta_{\pm i} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1.$$

Wieder ist gezeigt, dass  $M_{\text{nütz}}$  ein  $\mathcal{H}$ -Untermodul von  $M$  ist.

### 3.17 Längen und die Bruhat-Ordnung

Auf  $\mathcal{D}$  wird in [LV83] eine Längenfunktion  $l$  und eine Ordnung  $\leq$ , die Bruhat-Ordnung, definiert. Zum Abschluss dieses Kapitels berechnen wir diese auf  $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$  (für  $\text{SO}_{2n}$  und für  $\text{SP}_{2n}$  gleichzeitig).

DEFINITION 3.33 ([LV83], Def. 1.1). Für  $\delta_{\mathcal{O}, \gamma} \in \mathcal{D}$  sei  $l(\delta_{\mathcal{O}, \gamma}) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$ .

Sei  $l_0 := l(\delta_1) - 1$ . Da sich innerhalb einer Nachbarschaft die Dimensionen der kleinen und der großen Bahnen um genau eins unterscheiden, gilt sowohl im  $\text{SO}_{2n}$ - als auch im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall  $l(\delta_{\pm i}) = l_0 + i$  für  $1 \leq i \leq n$ , und im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall gilt zusätzlich  $l(\delta_\infty) = l_0 + n + 1$ . Mehr müssen wir über die Länge nicht wissen.

DEFINITION 3.34 ([LV83], Def. 1.8). Die Bruhat-Ordnung  $\leq$  auf  $\mathcal{D}$  sei die kleinste Ordnung, für die gilt:

- (a) Wenn  $s \in S$  und  $\delta, \delta' \in \mathcal{D}$  mit  $\delta \xrightarrow{s} \delta'$  ist, gilt  $\delta \leq \delta'$ .
- (b) Wenn  $s \in S$  ist und  $\delta, \delta', \gamma, \gamma' \in \mathcal{D}$  mit  $\delta \xrightarrow{s} \delta'$ ,  $\gamma \xrightarrow{s} \gamma'$  und  $\gamma \leq \delta$ , gilt  $\gamma' \leq \delta'$ .

Im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall erhalten wir  $\delta_i \leq \delta_j$  und  $\delta_{-i} \leq \delta_{-j}$  für  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall erhalten wir dasselbe und außerdem noch  $\delta_i \leq \delta_\infty$  für alle  $i$ . Elemente von  $\mathcal{D}_{\text{nütz}}$  und  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\text{nütz}}$  sind unvergleichbar.

## KAPITEL 4

### Berechnung der intermediären Erweiterungen

Wir sind weiterhin an den perversen Garben auf  $K \dashrightarrow G/B$  interessiert, wobei  $G \cong \mathrm{SO}_{2n}$  oder  $G \cong \mathrm{SP}_{2n}$  ist,  $B \subset G$  eine Borelsche und  $K = K(y) \subset G$  die Untergruppe, die in Kapitel 2 definiert wurde. Im vorigen Kapitel wurde zu dieser Situation ein Modul  $M$  der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}$  zu  $G$  definiert und ein Untermodul  $M_{\text{nütz}}$  ausgewählt und explizit konstruiert. Die Elemente  $\delta_{\mathcal{O},\gamma} \in \mathcal{D}_{\text{nütz}}$  der Basis von  $M_{\text{nütz}}$  entsprechen den äquivarianten lokalen Systemen  $\gamma$  auf Bahnen von  $K \dashrightarrow G/B$ , die wir zu einfachen perversen Garben ausdehnen wollen, um daraus den nützlichen Teil der geometrischen Ext-Algebra zu erhalten.

- DEFINITION 4.1.**
- (a) Für  $\delta = \delta_{\mathcal{O},\gamma} \in \mathcal{D}$  und die Inklusion  $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow G/B$  der Bahn sei  $\mathcal{L}_\delta := \iota_*\gamma[\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}]$  die einfache perverse Garbe, die man durch Ausdehnen und geeignetes Shiften von  $\gamma$  erhält.
  - (b) Für  $\delta_k \in \mathcal{D}_{\text{nütz}}$  (mit  $k = \pm 1, \dots, \pm n$  im  $\mathrm{SO}_{2n}$ -Fall bzw.  $k = \pm 1, \dots, \pm n, \infty$  im  $\mathrm{SO}_{2n}$ -Fall) sei  $\mathcal{L}_k := \mathcal{L}_{\delta_k}$  eine nützliche einfache perverse Garbe.
  - (c)  $\mathcal{L}_{\text{nütz}} := \bigoplus_{\delta \in \mathcal{D}_{\text{nütz}}} \mathcal{L}_\delta$  sei die direkte Summe all dieser nützlichen einfachen perversen Garben.
  - (d) Wir bezeichnen die perverse Garben  $\mathcal{L}_\delta$  und  $\mathcal{L}_{\delta'}$  als benachbart, wenn  $\delta$  und  $\delta'$  benachbart sind.

In diesem Kapitel wenden wir die Methoden aus [LV83] an, um mit Hilfe des  $\mathcal{H}$ -Moduls  $M_{\text{nütz}}$  diese intermediären Ausdehnungen  $\mathcal{L}_k$  zu analysieren. Als Ergebnis erhält man, welche einfachen (normalen) äquivarianten Garben in den Jordan-Hölder-Reihen der Kohomologien  $H^p(\mathcal{L}_k)$  vorkommen.

Vorgehensweise: In Theorem 1.10 von [LV83] wird eine Involution  $D: M \rightarrow M$  definiert, die geometrisch der Verdier-Dualität entspricht; diese Involution konstruieren wir auf  $M_{\text{nütz}}$  in den Abschnitten 4.1 und 4.2 (für den  $\mathrm{SO}_{2n}$ - bzw.  $\mathrm{SP}_{2n}$ -Fall).

Theorem 1.11 von [LV83] liefert dann eine neue  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Basis  $(\lambda_\delta)_{\delta \in \mathcal{D}}$  von  $M$ , die (bis auf einen  $q$ -Shift)  $D$ -invariant ist; wir berechnen diese Basis für  $M_{\text{nütz}}$  in Abschnitt 4.3. Bis auf einen Shift entspricht  $\lambda_\delta$  der einfachen perversen Garbe  $\mathcal{L}_\delta$ , da auch diese perversen Garben gerade dadurch charakterisiert sind, dass sie unter der Verdier-Dualität invariant sind (Details siehe [LV83]).

In Abschnitt 4.4 ziehen wir (unter Verwendung von [LV83], Theorem 1.12) aus all dem Schlüsse über  $\mathcal{L}_\delta$ : Wir können zeigen, dass viele Homomorphismen zwischen einfachen perversen Garben verschwinden, und insbesondere zeigen wir Theorem 1.4 (a):  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  ist ein direkter Summand von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{alle}})$ .

#### 4.1 Die Dualisierungsabbildung $D$ im Fall $\text{SO}_{2n}$

SATZ 4.2 ([LV83], Theorem 1.10). *Es gibt genau eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $D: M \rightarrow M$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(a)  *$D$  ist mit der üblichen Dualität auf  $\mathcal{H}$  verträglich, d. h.*

$$(6) \quad D(qm) = q^{-1}D(m) \quad \text{für } m \in M \quad \text{und}$$

$$(7) \quad D(C_s m) = q^{-1}C_s D(m) \quad \text{für } m \in M, s \in S.$$

(b) *Es gibt Polynome  $R_{\delta', \delta} \in \mathbb{Z}[q]$  ( $\delta', \delta \in \mathcal{D}$ ), so dass gilt:*

$$(8) \quad D(\delta) = q^{-l(\delta)} \left( \delta + \sum_{\delta' < \delta} R_{\delta', \delta} \delta' \right).$$

*Der Grad eines so erhaltenen Polynoms  $R_{\delta', \delta}$  ist höchstens  $l(\delta) - l(\delta')$ .*

Wir berechnen  $D$  auf unserem Untermodul  $M_{\text{nütz}}$ . Zur Erinnerung: Unsere  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -Basis von  $M_{\text{nütz}}$  ist  $\mathcal{D}_{\text{nütz}} = \{\delta_{\pm 1}, \dots, \delta_{\pm n}\}$ , und die Länge  $l(\delta_{\pm k})$  ist  $l_0 + k$  für ein festes  $l_0$  (das man leicht ausrechnen könnte, das uns aber nicht interessiert).

(8) liefert für  $\delta_1$

$$(9) \quad D(\delta_1) = q^{-l_0-1} \delta_1.$$

Sei nun  $1 \leq k \leq n-1$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} D(\delta_k + \delta_{k+1}) &= D(C_k \delta_k) \\ &\stackrel{(7)}{=} q^{-1} C_k D(\delta_k) \\ &\stackrel{(8)}{=} q^{-1} C_k \left( q^{-l_0-k} (\delta_k + \sum_{j=1}^{k-1} R_{j,k} \delta_j) \right). \end{aligned}$$

Da  $C_k \delta_j = 0$  für  $j < k$  ist, verschwindet die ganze Summe, und es bleibt:

$$(10) \quad D(\delta_k + \delta_{k+1}) = q^{-l_0-k-1} C_k \delta_k = q^{-l_0-k-1} (\delta_k + \delta_{k+1}).$$

Genau die gleiche Rechnung ergibt sich für  $\delta_{-1}$  und  $\delta_{-k} + \delta_{-(k+1)}$ .

Wenn man möchte, kann man damit  $D$  induktiv berechnen. Da kommt allerdings eine hässliche Summe heraus, und uns werden sowieso die Formeln genügen, die wir jetzt schon haben; also lassen wir's bleiben.

### 4.2 Die Dualisierungsabbildung $D$ im Fall $\text{SP}_{2n}$

Erinnerung: Unsere Basis von  $M_{\text{nütz}}$  ist in diesem Fall  $\mathcal{D}_{\text{nütz}} = \{\delta_{\pm 1}, \dots, \delta_{\pm n}, \delta_\infty\}$  und die Längen sind  $l(\delta_{\pm k}) = l_0 + k$  und  $l(\delta_\infty) = l_0 + n + 1$ , wieder für ein festes  $l_0$ .

Wie im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall erhalten wir

$$(11) \quad D(\delta_{\pm 1}) = q^{-l_0-1} \delta_{\pm 1}$$

$$(12) \quad D(\delta_{\pm k} + \delta_{\pm(k+1)}) = q^{-l_0-k-1} (\delta_{\pm k} + \delta_{\pm(k+1)}).$$

Bleibt eine Sonderbehandlung für die  $s_\star$ -Nachbarschaft bei  $\delta_\infty$ :

$$\begin{aligned} D(\delta_n + \delta_{-n} + \delta_\infty) &= D(C_\star \delta_n) \\ &\stackrel{(7)}{=} q^{-1} C_\star D(\delta_n) \\ &\stackrel{(8)}{=} q^{-1} C_\star \left( q^{-l_0-n} (\delta_n + \sum_{j=1}^{n-1} R_{j,k} \delta_j) \right). \end{aligned}$$

Da  $C_\star \delta_j = 0$  für  $1 \leq j \leq n-1$  ist, verschwindet wieder die Summe, und es bleibt:

$$(13) \quad D(\delta_n + \delta_{-n} + \delta_\infty) = q^{-l_0-n-1} C_\star \delta_n = q^{-l_0-n-1} (\delta_n + \delta_{-n} + \delta_\infty).$$

Auch diese Formeln genügen uns wieder.

### 4.3 Die neue Basis $(\lambda_\delta)_{\delta \in \mathcal{D}_{\text{nütz}}}$

SATZ 4.3 ([LV83], Theorem 1.11). *Zu jedem  $\delta \in \mathcal{D}$  gibt es genau ein*

$$\lambda_\delta = \sum_{\delta' \leq \delta} P_{\delta', \delta} \delta' \in M, \quad P_{\delta', \delta} \in \mathbb{Z}[q],$$

das folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(a) \quad D(\lambda_\delta) = q^{-l(\delta)} \lambda_\delta.$$

$$(b) \quad P_{\delta, \delta} = 1.$$

$$(c) \quad \text{Falls } \delta' \neq \delta \text{ ist, ist } P_{\delta', \delta} \text{ ein Polynom vom Grad höchstens } \frac{1}{2}(l(\delta) - l(\delta') - 1).$$

Die Gleichungen (9) und (10) bzw. (11), (12) und (13) liefern gerade Elemente  $\lambda_k := \lambda_{\delta_k}$ , die diese Bedingungen erfüllen: Man erhält im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall

$$(14) \quad \lambda_{\pm 1} = \delta_{\pm 1}$$

$$(15) \quad \lambda_{\pm k} = \delta_{\pm k} + \delta_{\pm(k-1)} \quad \text{für } 2 \leq k \leq n$$

und im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall dasselbe und zusätzlich

$$(16) \quad \lambda_\infty = \delta_\infty + \delta_n + \delta_{-n}.$$

#### 4.4 Folgerungen für die einfachen perversen Garben $\mathcal{L}_k$

Sei  $\mathcal{O} \subset G/B$  eine Bahn,  $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow G/B$  die Inklusion und  $\gamma$  ein äquivariantes lokales System auf  $\mathcal{O}$ . Sei  $\delta := \delta_{\mathcal{O}, \gamma} \in \mathcal{D}$ . Theorem 1.12 von [LV83] erklärt, was genau man aus  $\lambda_\delta$  über die intermediäre Ausdehnung  $\iota_*\gamma$  erfahren kann:

**SATZ 4.4** ([LV83], Theorem 1.12). *Sei  $\delta := \delta_{\mathcal{O}, \gamma} \in \mathcal{D}$ , und sei  $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow G/B$  die Inklusion. Dann gilt:*

- (a)  $H^p(\iota_*\gamma) = 0$  für  $p$  ungerade.
- (b) Sei außerdem  $\delta' := \delta_{\mathcal{O}', \gamma'} \in \mathcal{D}$  und  $\iota': \mathcal{O}' \hookrightarrow G/B$  die Inklusion. Dann ist

$$P_{\delta', \delta} = \sum_p [H^{2p}(\iota_*\gamma) : \iota'_*\gamma'] q^p.$$

*Dabei sei  $[\mathcal{F} : \mathcal{G}]$  die Multiplizität der einfachen (nicht-perversen) äquivarianten Garbe  $\mathcal{G}$  in der Jordan-Hölder-Reihe von  $\mathcal{F}$ .*

Die Koeffizienten der Polynome  $P_{\delta', \delta}$  geben also Multiplizitäten in den Jordan-Hölder-Reihen der Kohomologien an. Somit kann man aus den Gleichungen (14), (15) und (16) ablesen, woraus die nützlichen einfachen perversen Garben bestehen. Unter anderem sehen wir, auf welchen Bahnen sie leben: (Mit „ $\mathcal{L}$  lebt auf  $X$ “ ist gemeint: Für die Inklusion  $\iota: G/B \setminus X \hookrightarrow G/B$  gilt:  $\iota^*\mathcal{L} = 0$ .)

**KOROLLAR 4.5.** *Sei  $\mathcal{O} \in V$  eine nützliche Bahn,  $\gamma$  ein nützliches äquivariantes lokales System darauf und  $\mathcal{L}$  die zugehörige nützliche einfache perverse Garbe (d. h. die intermediäre Ausdehnung von  $\gamma$ ). Wenn  $\mathcal{O}$  nützliche kleine Nachbarn hat, lebt  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{O}$  und auf diesen kleinen Nachbarn; sonst lebt  $\mathcal{L}$  nur auf  $\mathcal{O}$ .*

Daraus, dass die Jordan-Hölder-Reihen der nützlichen einfachen perversen Garben so kurz sind, wollen wir außerdem schließen, dass viele Homomorphismengruppen verschwinden. Dazu dient der folgende Satz, der eine Adaption von Theorem 3.4.1 aus [BGS96] an unsere Situation und unsere Bedürfnisse ist:

**SATZ 4.6.** *Seien  $\delta$  und  $\delta'$  aus  $\mathcal{D}$  so, dass  $\lambda_\delta$  und  $\lambda_{\delta'}$  keine gemeinsamen Summanden haben, d. h. für alle  $\delta'' \in \mathcal{D}$  gilt  $P_{\delta'', \delta} = 0$  oder  $P_{\delta'', \delta'} = 0$ . Dann ist  $R\mathrm{Hom}_K(\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_{\delta'}) = 0$ .*

Da der Beweis noch zwei Lemmata erfordert, verschieben wir ihn in den nächsten Abschnitt. Hier erst mal die Schlussfolgerungen: Anwenden dieses Satzes auf die nützlichen einfachen perversen Garben (mit den Gleichungen (14), (15) und (16)) liefert:

**KOROLLAR 4.7.** *Seien  $\mathcal{L}_\delta$  und  $\mathcal{L}_{\delta'}$  zwei nützliche einfache perverse Garben. Wenn weder  $\delta \xrightarrow{s} \delta'$  noch  $\delta' \xrightarrow{s} \delta$  für irgendein  $s \in S$  gilt, ist  $R\mathrm{Hom}_K(\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_{\delta'}) = 0$ .*

*Bemerkung:* Dieses Korollar besagt, dass jeder Endomorphismus von  $\mathcal{L}_{\mathrm{nütz}}$  schon „innerhalb einer Nachbarschaft lebt“. Das ist ein Grund dafür, dass wir  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{nütz}})$  verhältnismäßig leicht bestimmen können: Endomorphismen innerhalb einzelner Nachbarschaften lassen sich durch „Hochinduzieren der  $K_{\mathrm{St}} \dashrightarrow G_{\mathrm{St}}/B_{\mathrm{St}}$ -Situation“ bestimmen (was wir im nächsten Kapitel tun werden), und dann muss man nur noch alles zusammensetzen.

Eine weitere Schlussfolgerung aus Satz 4.6 ist:

**KOROLLAR 4.8.** *Eine Zerlegung des  $\mathcal{H}$ -Moduls  $M$  der Form*

$$M = \bigoplus_i \langle \mathcal{D}_i \rangle_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} \quad \text{für } \bigcup_i \mathcal{D}_i = \mathcal{D}$$

liefert auch eine entsprechende Zerlegung der Algebra  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{alle}})$ :

$$\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{alle}}) = \bigoplus_i \mathrm{End}_K^\bullet\left(\bigoplus_{\delta \in \mathcal{D}_i} \mathcal{L}_\delta\right).$$

Da  $M_{\mathrm{nütz}}$  ein direkter Summand von  $M$  ist, ist also  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{nütz}})$  ein direkter Summand von  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{alle}})$ ; damit haben wir Theorem 1.4 (a) bewiesen.

*Bemerkung:* Da im  $\mathrm{SO}_{2n}$ -Fall  $M_{\mathrm{nütz}}$  selbst nochmal in zwei Summanden zerfällt (siehe Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.14), zerfällt auch  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{nütz}})$  in diesem Fall nochmal:

$$\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\mathrm{nütz}}) \cong \mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n) \oplus \mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{-n}).$$

## 4.5 Homomorphismen verschwinden

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir Satz 4.6. Dazu zeigen wir zunächst zwei Lemmata. Das erste ist ein ganz allgemeines über äquivariante derivierte Kategorien:

**LEMMA 4.9.** *Sei  $G$  eine algebraische Gruppe, die auf einem Raum  $X$  operiert, und sei  $U$  ein zusammenziehbarer Normalteiler von  $G$ , der trivial auf  $X$  operiert. Dann hat man eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Res}_{G, G/U}: D_{G/U}(X) \cong D_G(X).$$

*Beweis:* Sei  $EG$  das universelle Bündel über einem klassifizierenden Raum zu  $G$ . Dann ist  $X \times EG \rightarrow X$  eine azyklische Auflösung von

$G \dashrightarrow X$  im Sinne von [BL94]. Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
X \times_G EG & \xlongequal{\quad} & X \times_G EG \\
\uparrow q & & \uparrow q' \\
X \times EG & \xrightarrow{a} & X \times_U EG \\
\downarrow p & & \downarrow p' \\
X & \xlongequal{\quad} & X \\
\uparrow \phi & & \uparrow \phi \\
G & \longrightarrow & G/U
\end{array}$$

Die Abbildung  $a$  ist ein Faserbündel, dessen Fasern  $U$  nach Voraussetzung zusammenziehbar sind, also ist sie azyklisch.

Wir wollen zwei Dinge zeigen: (a)  $p'$  ist azyklisch. Daraus folgt, dass  $D_{G/U}(X)$  eine volle Unterkategorie von  $D(X \times_G EG)$  ist. (b) Diese Unterkategorie ist die gleiche wie  $D_G(X)$ .

Zu (a): Sei  $\mathcal{F} \in D(X)$ . Dann ist

$$Rp'_*p'^*\mathcal{F} = Rp'_*Ra_*a^*p'^*\mathcal{F} = Rp_*p^*\mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

Ein Basiswechsel  $\tilde{X} \rightarrow X$  liefert

$$(X \times EG) \times_X \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{a}} (X \times_U EG) \times_X \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{p}'} \tilde{X};$$

hier geht die Rechnung genauso durch.

Zu (b): Ein Objekt  $\mathcal{F} \in D(X \times_G EG)$  definiert genau dann ein Objekt von  $D_G(X)$ , wenn es ein Objekt  $\mathcal{G} \in D(X)$  gibt mit:

$$\begin{array}{ccc}
p^*\mathcal{G} & \cong & q^*\mathcal{F} \\
\parallel & & \parallel \\
a^*p^*\mathcal{G} & & a^*q^*\mathcal{F}
\end{array}$$

Da  $a$  azyklisch ist, ist  $a^*$  volltreu, also ist das äquivalent zu  $p^*\mathcal{G} \cong q^*\mathcal{F}$ , und das wiederum ist äquivalent dazu, dass  $\mathcal{F}$  ein Objekt von  $D_{G/U}(X)$  definiert.  $\square$

Im nächsten Lemma untersuchen wir die äquivariante derivierte Kategorie auf einer einzelnen Bahn von  $K \dashrightarrow G/B$ :

**LEMMA 4.10.** *Für eine Bahn  $\mathcal{O} \in V$  zerfällt die derivierte Kategorie  $D_K(\mathcal{O})$  in eine direkte Summe, bei der jedes äquivariante lokale System auf  $\mathcal{O}$  in einem eigenen Summanden liegt.*

*Beweis:* In Abschnitt 3.10 hatten wir die äquivarianten lokalen Systeme auf einer Bahn untersucht. Das schauen wir uns nochmal genauer an: Sei  $x \in G$  wieder ein Repräsentant von  $\mathcal{O}$  mit  $\kappa(x) = x^{-1}yx \in \Gamma N(T)$  und  $I_x \subset K$  der Stabilisator von  $xB \in \mathcal{O}$ . Wir hatten gesehen, dass  $I_x \cong (K_x \cap U) \rtimes (K_x \cap T)$  ist. Für die äquivariante derivierte

Kategorie bedeutet das (unter Verwendung der *induction equivalence* und von Lemma 4.9):

$$D_K(\mathcal{O}) \cong D_{I_x}(\text{Pt}) \cong D_{K_x \cap T}(\text{Pt})$$

$K_x \cap T$  ist eine diagonalisierbare komplexe algebraische Gruppe und zerfällt deshalb in ein direktes Produkt  $(K_x \cap T)^0 \times A_{\mathcal{O}}$ , wobei  $A_{\mathcal{O}} \cong (K_x \cap T)/(K_x \cap T)^0$  die Komponentengruppe ist. Jetzt zerfällt die ganze äquivariante derivierte Kategorie bezüglich der Operation von  $A_{\mathcal{O}}$ .  $\square$

Damit können wir endlich Satz 4.6 zeigen (d. h. zwischen einfachen perversen Garben ohne gemeinsamen Summanden im Hecke-Modul  $M$  gibt es keine Homomorphismen). In dem Beweis ist mit „ $\mathcal{F}$  kommt in  $\mathcal{G}$  vor“ gemeint: Die einfache Garbe  $\mathcal{F}$  kommt in der Jordan-Hölder-Reihe von  $H^p(\mathcal{G})$  vor für ein  $p \in \mathbb{Z}$  (in der Kategorie der normalen äquivalenten Garben).

*Beweis (von Satz 4.6):* Wir zeigen allgemeiner die folgende Behauptung: Sei eine Teilmenge  $X \subset G/B$  gegeben, die Vereinigung von Bahnen ist. Seien außerdem zwei einfache perverse Garben  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  auf  $K \dashrightarrow X$  gegeben, so dass für alle Bahnen  $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow X$  und alle äquivalenten lokalen Systeme  $\gamma$  auf  $\mathcal{O}$  gilt:  $\iota_! \gamma$  kommt nicht sowohl in  $\mathcal{L}$  als auch in  $\mathcal{L}'$  vor. Dann ist  $R\text{Hom}_K(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = 0$ .

Die einfachen perversen Garben  $\mathcal{L}_\delta$  und  $\mathcal{L}_{\delta'}$  aus dem Satz erfüllen diese Bedingung (mit  $X = G/B$ ), d. h. wenn wir diese Behauptung gezeigt haben, sind wir fertig.

Wähle nun eine abgeschlossene Bahn  $F \subset X$ . Sei  $U$  das Komplement von  $F$ , und seien  $i: F \hookrightarrow X$  und  $j: U \hookrightarrow X$  die Inklusionen.

Wir haben ein ausgezeichnetes Dreieck

$$j_! j^* \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow i_! i^* \mathcal{L} \xrightarrow{+1} .$$

Darauf  $R\text{Hom}_K(\cdot, \mathcal{L}')$  anwenden liefert

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} R\text{Hom}_K(j_! j^* \mathcal{L}, \mathcal{L}') & \leftarrow & R\text{Hom}_K(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \leftarrow R\text{Hom}_K(i_! i^* \mathcal{L}, \mathcal{L}') \xleftarrow{+1} \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ R\text{Hom}_K(j^* \mathcal{L}, j^* \mathcal{L}') & & R\text{Hom}_K(i^* \mathcal{L}, i^* \mathcal{L}') . \end{array}$$

Es reicht also,  $R\text{Hom}_K(j^* \mathcal{L}, j^* \mathcal{L}') = 0$  und  $R\text{Hom}_K(i^* \mathcal{L}, i^* \mathcal{L}') = 0$  zu zeigen.

$R\text{Hom}_K(j^* \mathcal{L}, j^* \mathcal{L}') = 0$  erhalten wir durch Induktion über die Anzahl der Bahnen von  $K \dashrightarrow X$ :  $j^* \mathcal{L}$  und  $j^* \mathcal{L}'$  sind einfache äquivalente perverse Garben auf  $U$ , die die Bedingung der Behauptung erfüllen.

Zu  $R\text{Hom}_K(i^* \mathcal{L}, i^* \mathcal{L}')$ : In  $i^* \mathcal{L}$  kommen nur solche äquivalente lokale Systeme  $\delta$  vor, für die  $i_! \delta$  in  $\mathcal{L}$  vorkommt. Wenn wir das entsprechende auch für  $i^* \mathcal{L}'$  gezeigt haben, sind wir fertig: Dann kommt (nach Voraussetzung) kein äquivalentes lokales System sowohl in  $i^* \mathcal{L}$  als auch in  $i^* \mathcal{L}'$  vor; nach Lemma 4.10 folgt daraus  $R\text{Hom}_K(i^* \mathcal{L}, i^* \mathcal{L}') = 0$ .

Zu  $i^!\mathcal{L}'$ : Da alle äquivarianten lokalen Systeme auf Bahnen von  $K \dashrightarrow X$  selbstdual sind, ist auch  $\mathcal{L}'$  selbstdual, also ist  $i^!\mathcal{L}' = Di^*\mathcal{L}'$ . Weil auf  $F$  alle äquivarianten Garben lokalkonstant sind (und damit insbesondere auch die  $H^p(i^*\mathcal{L}')$ ), gilt

$$H^p(Di^*\mathcal{L}') = H^{p'}(i^*\mathcal{L}')^\vee := \mathcal{H}om_K(H^{p'}(i^*\mathcal{L}'), \text{or}_F)$$

mit  $p' := -p - \dim_{\mathbb{R}} F$ .

Die Jordan-Hölder-Reihe von  $H^{p'}(i^*\mathcal{L}')^\vee$  besteht aus den dualen  $\delta^\vee$  der äquivarianten lokalen Systeme  $\delta$ , die in  $H^{p'}(i^*\mathcal{L}')$  vorkommen (auch wegen der Lokalkonstantheit); die  $\delta$  sind aber selbstdual. Also haben wir jetzt: In  $i^!\mathcal{L}'$  kommen dieselben äquivarianten lokalen Systeme wie in  $i^*\mathcal{L}'$  vor, und da wiederum kommen nur die  $\delta$  vor, für die  $i_!\delta$  in  $\mathcal{L}'$  vorkommt.  $\square$

## KAPITEL 5

### Die Ext-Algebra einer Nachbarschaft

#### 5.1 Ziel des Kapitels

In diesem Kapitel kümmern wir uns um die letzte Zutat, die wir zur Konstruktion der geometrischen Ext-Algebra  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  auf  $K \dashrightarrow G/B$  benötigen: die Homomorphismen zwischen benachbarten einfachen perversen Garben. Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

**SATZ 5.1.** *Sei  $\mathcal{N}$  die direkte Summe aller einfachen perversen Garben einer nützlichen Nachbarschaft. Sei  $X$  die Vereinigung entsprechenden Bahnen, und sei  $\iota: X \hookrightarrow G/B$  die Inklusion. Dann ist die Endomorphismen-Algebra  $\text{End}_K^\bullet(\iota^*\mathcal{N})$  – in Abhängigkeit von der Nachbarschaftsart – das Folgende:*

(a) Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$ :

$$\text{End}_K^\bullet(\iota^*\mathcal{N}) \cong \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} \bullet \curvearrowright c \quad | \quad ca = bc = 0.$$

*Der linke Punkt entspricht dem kleinen Nachbarn, der rechte Punkt dem großen.*

(b) Fall  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$ :

$$\text{End}_K^\bullet(\iota^*\mathcal{N}) \cong \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_+} \\ \xleftarrow{b_+} \end{array} \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{a_-} \\ \xrightarrow{b_-} \end{array} \bullet \quad | \quad b_+a_- = b_-a_+ = 0.$$

*Die äußeren Punkte entsprechen den kleinen Nachbarn, der mittlere dem großen.*

*Alle Pfeile haben Grad 1.*

Beim folgenden Beweis wird die meiste Arbeit auf zwei Lemmata verschoben, die in den späteren Abschnitten dieses Kapitels bewiesen werden.

*Beweis:* Die Idee ist, zunächst auf  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  die Endomorphismen-Algebra einer geeigneten perversen Garbe zu berechnen und das dann hochzuziehen (so wie wir es in Abschnitt 3.4 schon mit Bahnen getan haben). Dazu definieren wir zunächst eine Notation für die direkte Summe aller perversen Garben einer Nachbarschaft:

DEFINITION 5.2. Sei  $K$  eine Gruppe, die auf einem Raum  $X$  mit endlich vielen Bahnen  $\mathcal{O}_\nu$ ,  $\nu \in I$  operiert. ( $X$  wird später die Vereinigung aller Bahnen einer Nachbarschaft sein.) Die  $i_\nu: \mathcal{O}_\nu \hookrightarrow X$  seien die Inklusionen dieser Bahnen.

Für ein äquivariantes lokales System  $\bar{\gamma}$  auf  $X$  definiere die zugehörige perverse Nachbarschaft

$$\mathcal{N}(\bar{\gamma}) := \bigoplus_{\nu \in I} i_{\nu!} i_\nu^* \bar{\gamma}[\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_\nu],$$

d. h. die direkte Summe aller einfachen perversen Garben aus der Nachbarschaft, die von  $\bar{\gamma}$  im Sinne von Definition 3.24 induziert wird. (Definition 3.24 ist die Definition der Nachbarschaft von äquivarianten lokalen Systemen.)

Jetzt machen wir uns klar, dass das, was wir berechnen wollen, die Endomorphismen einer perversen Nachbarschaft in diesem Sinne sind. Gegeben ist die direkte Summe  $\mathcal{N}$  aller perversen Garben einer Nachbarschaft. Diese Nachbarschaft wird (nach Definition 3.24) durch ein äquivariantes lokales System  $\bar{\gamma}$  auf der Vereinigung  $X$  der zugehörigen Bahnen gegeben. Seien  $\mathcal{O}_\nu$  und  $i_\nu$  wie in Definition 5.2 (für dieses  $X$  und unser übliches  $K$ ). Außerdem sei  $\iota: X \hookrightarrow G/B$  die Inklusion. Dann ist

$$\iota^* \mathcal{N} = \iota^* \bigoplus_{\nu} (\iota \circ i_\nu)_! i_\nu^* \bar{\gamma}[\dim \mathcal{O}_\nu] = \bigoplus_{\nu} i_{\nu!} i_\nu^* \bar{\gamma}[\dim \mathcal{O}_\nu] = \mathcal{N}(\bar{\gamma}).$$

Gesucht ist also  $\text{End}_K^\bullet(\iota^* \mathcal{N}) = \text{End}_K^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma}))$ .

Die perverse Garbe auf  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ , deren Endomorphismen wir berechnen und dann hochziehen wollen, ist  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})$ , wobei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  ist. Wir werden zeigen:

LEMMA 5.3. Sei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ . Die Endomorphismen von  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})$  sind – in Abhängigkeit von  $K_{\text{St}}$  – das Folgende:

(a) Fall  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$ :

$$\text{End}_{K_{\text{St}}}^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) \cong \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} \bullet \curvearrowright c \quad | \quad ca = bc = 0.$$

Der linke Punkt entspricht dem kleinen Nachbarn, der rechte Punkt dem großen.

(b) Fall  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$ :

$$\text{End}_{K_{\text{St}}}^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) \cong \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_+} \\ \xleftarrow{b_+} \end{array} \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{a_-} \\ \xrightarrow{b_-} \end{array} \bullet \quad | \quad b_+ a_- = b_- a_+ = 0.$$

Die äußeren Punkte entsprechen den kleinen Nachbarn, der mittlere dem großen.

Offenbar ist  $\text{End}_{K_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}}))$  genau die Algebra, die wir gerne für  $\text{End}_K^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}))$  hätten. Der zu zeigende Satz folgt jetzt also aus dem folgenden Lemma:

LEMMA 5.4. *Sei  $X$  die Vereinigung aller Bahnen einer nützlichen Nachbarschaft, und sei  $\bar{\gamma}$  ein äquivariantes lokales System auf  $X$ . Sei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $K_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ . Dann gilt:*

$$\text{End}_{K_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) \cong \text{End}_K^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma})).$$

□

*Bemerkung:* Für beliebige Bahn-Nachbarschaften  $X$  ist Lemma 5.4 im Allgemeinen falsch: Auf den meisten Bahnen operiert ein zu großer Teil eines Torus' von  $K$  trivial; das führt dazu, dass die Endomorphismen in  $D_K(G/B)$  komplizierter werden als die in  $D_{K_{\text{St}}}(G_{\text{St}}/B_{\text{St}})$ .

Der Rest des Kapitels ist folgendermaßen aufgebaut: In den beiden folgenden Abschnitten berechnen wir  $\text{End}_{K_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}}))$  im Fall  $K_{\text{St}} = T_{\text{St}}$  und im Fall  $K_{\text{St}} = B_{\text{St}}$ ; damit haben wir dann Lemma 5.3 gezeigt. In Abschnitt 5.4 zeigen wir Lemma 5.4; dabei wird ein weiteres Lemma verwendet, dessen Beweis auf Abschnitt 5.5 verschoben wird.

## 5.2 Die Ext-Algebra bei $T_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Endomorphismen-Algebra von  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})$ , wobei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $T_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  ist. Wir haben  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}} \cong \mathbb{P}^1\mathbb{C} =: X$  und  $T_{\text{St}} \cong \mathbb{C}^{\times}$ .

*Beweis (Lemma 5.3 (b)):* Es gibt drei Bahnen:  $\mathcal{P} := \{\infty\}$ ,  $\mathcal{P}' := \{0\}$  und  $\mathcal{O} := \mathbb{C}^{\times}$  („ $\mathcal{P}$ “ wie „Punkt“, „ $\mathcal{O}$ “ wie „offen“). Seien  $i, i'$  und  $j$  die Inklusionen der Bahnen in  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Die konstanten Garben auf diesen Bahnen liefern (durch intermediäre Ausdehnung) die folgenden einfachen perversen Garben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{P}} &:= i_*\mathbb{C}_{\mathcal{P}} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{P}'} &:= i'_*\mathbb{C}_{\mathcal{P}'} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{O}} &:= \mathbb{C}_X[1]. \end{aligned}$$

Gesucht ist  $\text{End}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) = \text{End}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{P}'} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{O}})$ . Wir berechnen der Reihe nach die  $\text{Hom}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}$  zwischen den einzelnen Summanden. Bei den Endomorphismenräumen erhalten wir graduierte Algebren, bei Homomorphismen zwischen verschiedenen Garben graduierte Vektorräume. Sei  $B\mathbb{C}^{\times} := \mathbb{P}^{\infty}\mathbb{C}$  der klassifizierende Raum von  $\mathbb{C}^{\times}$  und  $EC^{\times} := \mathbb{C}^{\infty}$  das universelle Bündel darüber.

$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \curvearrowright, \mathcal{L}_{\mathcal{P}'} \curvearrowright$ : Wir haben Algebra-Isomorphismen

$$\text{End}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\mathcal{P}}) \cong \text{End}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}) \cong H_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathcal{P}) \cong H^{\bullet}(B\mathbb{C}^{\times}) \cong \mathbb{C}[t],$$

wobei  $t$  Grad 2 hat (vgl. z. B. [BL94], 13.10). Entsprechend ist auch  $\text{End}_{\mathbb{C}^{\times}}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\mathcal{P}'}) \cong \mathbb{C}[t]$ .

$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \xleftrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ : Da  $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$  in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{L}_{\mathcal{P}}) = 0.$$

$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \leftarrow \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ : Wir haben folgende Isomorphismen von graduierten Vektorräumen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_{\mathcal{P}}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(i^* \mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \mathbb{C}_{\mathcal{P}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}[1], \mathbb{C}_{\mathcal{P}}) \\ &\cong \mathbb{C}[t][-1], \end{aligned}$$

und entsprechend für  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ .

$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \leftarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ : Wir haben folgende Isomorphismen von graduierten Vektorräumen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \mathcal{L}_{\mathcal{O}}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, i^! \mathcal{L}_{\mathcal{O}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, Di^* D\mathcal{L}_{\mathcal{O}}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, D\mathbb{C}_{\mathcal{P}}[1]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, \mathbb{C}_{\mathcal{P}}[-1]) \\ &\cong \mathbb{C}[t][-1], \end{aligned}$$

und entsprechend für  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ .

$\mathcal{L}_{\mathcal{O}} \ni$ : Es gilt  $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{O}}) \cong H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(X)$ . Dies berechnen wir, indem wir  $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  mit zwei Kopien von  $\mathbb{C}$  überdecken und die Mayer-Vietoris-Sequenz anwenden.

Berechnung von  $H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C})$ : Die Abbildung

$$\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^\times} E\mathbb{C}^\times \longrightarrow \{\mathrm{Pt}\} \times_{\mathbb{C}^\times} E\mathbb{C}^\times \cong B\mathbb{C}^\times$$

ist eine Homotopieäquivalenz, also ist

$$H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}) \cong H^\bullet(\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^\times} E\mathbb{C}^\times) \cong H^\bullet(B\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{C}[t],$$

wieder mit  $t$  vom Grad 2.

Der Schnitt der beiden Kopien von  $\mathbb{C}$ , die  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  überdecken, ist  $\mathbb{C}^\times$ , und  $H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{C}$  (im Grad 0). Wir erhalten die lange exakte Kohomologie-Sequenz

$$(18) \quad H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{+1} .$$

Im Grad 0 sind die Abbildungen gegeben durch

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{(1 \ -1)} \mathbb{C}.$$

Also verschwindet die Randabbildung  $\mathbb{C} \xrightarrow{+1} H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ , und (18) wird zu einer kurzen exakten Sequenz.  $H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}[t]$  ist ein Algebren-Homomorphismus; wir erhalten also

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{O}}) \cong H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \cong \ker(\mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[t_1, t_2]/(t_1 t_2),$$

wieder mit  $t_1$  und  $t_2$  vom Grad 2.

Wir kennen jetzt alle einzelnen  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet$ ; fehlt noch die Verknüpfung zwischen Elementen verschiedener Homomorphismenräume. Wir werden gleich zeigen, dass es Elemente  $a_+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^1(\mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \mathcal{L}_{\mathcal{O}})$  und  $b_+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^1(\mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \mathcal{L}_{\mathcal{P}'})$  gibt mit  $a_+ b_+ \neq 0$  (und entsprechend  $a_-$  und  $b_-$  für

$\mathcal{L}_{\mathcal{P}'}$ ). In  $\text{End}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$  folgt aus  $a_+b_+ \neq 0$  schon  $(a_+b_+)^n \neq 0$ ; daraus folgt letztendlich alles weitere für die Verknüpfungen, und als Ergebnis erhält man

$$\text{End}_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) = \begin{array}{ccccc} & & a_+ & & a_- \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \bullet & & & \bullet & & \bullet \\ & & b_+ & & b_- \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowright \end{array} \quad | \quad b_+a_- = b_-a_+ = 0.$$

Jetzt also noch die versprochenen Elemente  $a_+$  und  $b_+$  mit  $a_+b_+ \neq 0$ . Wir suchen  $a_+ \in \text{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^2(i_*\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, \mathbb{C}_X)$  und  $b_+ \in \text{Hom}_{\mathbb{C}^\times}^0(\mathbb{C}_X, i_*\mathbb{C}_{\mathcal{P}})$ .

Aus den Paaren von adjungierten Funktoren  $(i_*, i^!)$  und  $(i^*, i_*)$  erhalten wir Abbildungen  $a_+ : i_*i^!\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X$  und  $b_+ : \mathbb{C}_X \rightarrow i_*i^*\mathbb{C}_X$ . Wegen  $i_*\mathbb{C}_{\mathcal{P}} \cong i_*i^*\mathbb{C}_X \cong i_*i^!\mathbb{C}_X[2]$  liegen diese Abbildungen in den gewünschten Homomorphismen-Räumen. Der Isomorphismus  $i_*i^*\mathbb{C}_X \cong i_*i^!\mathbb{C}_X[2]$  ist jedoch nicht kanonisch; wir werden also einen solchen Isomorphismus auswählen, damit die Verknüpfung  $a_+b_+$  überhaupt Sinn ergibt. Das geht durch Wahl von Orientierungen  $\mu_{\mathcal{P}} : i^*\mathbb{C}_X = \mathbb{C}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathcal{P}}$  und  $\mu_X : \mathbb{C}_X \xrightarrow{\sim} \text{or}_X$ . Wir erhalten als Verknüpfung  $a_+b_+$  in dem Nachfolgenden Diagramm den Weg von  $\mathbb{C}_X$  nach unten, dann ganz nach rechts und dann hoch zu  $\mathbb{C}_X[2]$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}_X & & \text{or}_X[2] & \xleftarrow{\mu_X} & \mathbb{C}_X[2] \\ \downarrow b_+ & & a' \uparrow & & a_+ \uparrow \\ i_*i^*\mathbb{C}_X & \xrightarrow{i_*(\mu_{\mathcal{P}})} & i_*\text{or}_{\mathcal{P}} = i_*i^!\text{or}_X[2] & \xrightarrow{i_*i^!(\mu_X^{-1})} & i_*i^!\mathbb{C}_X[2] \end{array}$$

Um zu zeigen, dass diese lange Verknüpfung nicht 0 ist, hängen wir nochmal  $\mu_X$  hintendran und kommen bei  $\text{or}_X[2]$  an;  $a'$  kommt wieder von der Adjungiertheit  $(i_*, i^!)$ . Dies kann man auch so interpretieren:  $\mu_{\mathcal{P}}$  ist ein Element der Borel-Moore-Homologie  $H_0^{\text{BM}}(\mathcal{P}) \cong \text{Hom}^0(\mathbb{C}_{\mathcal{P}}, \text{or}_{\mathcal{P}})$ , und die Verknüpfung  $a' \circ i_*\mu_{\mathcal{P}} \circ b_+$  ist das Bild davon in  $H_0^{\text{BM}}(X) \cong \text{Hom}^0(\mathbb{C}_X, \text{or}_X[2])$ ; dieses Bild ist nicht 0, da  $X$  kompakt ist.  $\square$

### 5.3 Die Ext-Algebra bei $B_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Endomorphismen-Algebra von  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})$ , wobei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $B_{\text{St}} \dashrightarrow G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  ist. Wir führen diesen Fall auf den  $T_{\text{St}}$ -Fall aus dem vorigen Abschnitt zurück. Dazu brauchen wir das folgende Lemma:

**LEMMA 5.5.** *Sei  $G$  eine algebraische Gruppe und  $L \subset G$  eine Untergruppe, so dass der Raum  $G/L$  zusammenziehbar ist.  $G$  operiere auf einem Raum  $X$ . Dann ist  $D_G(X)$  mittels Restriktion eine volle Unterkategorie von  $D_L(X)$ .*

*Beweis:* Sei  $EG$  das universelle Bündel über einem klassifizierenden Raum zu  $G$ . Dann ist  $X \times EG \twoheadrightarrow X$  eine azyklische Auflösung im Sinne von [BL94] sowohl von  $G \dashrightarrow X$  als auch von  $L \dashrightarrow X$ ; also

ist  $D_G(X)$  eine volle Unterkategorie von  $X \times_G EG$  und  $D_L(X)$  eine volle Unterkategorie von  $X \times_L EG$ .

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_L EG & \xrightarrow{a} & X \times_G EG \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X \times EG & \xlongequal{\quad} & X \times EG \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xlongequal{\quad} & X \\
 \uparrow \phi & & \uparrow \phi \\
 L & \xrightarrow{\quad} & G
 \end{array}$$

Die Abbildung  $a$  ist ein Faserbündel mit Faser  $G/L$ . Da  $G/L$  zusammenziehbar ist, ist  $a$  azyklisch, also ist  $a^*: D(X \times_G EG) \rightarrow D(X \times_L EG)$  volltreu. Man prüft leicht nach, dass das Bild von  $D_G(X)$  unter  $a^*$  in  $D_L(X)$  landet.  $\square$

Zurück zu den Endomorphismen von  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})$ :

*Beweis (Lemma 5.3 (a)):* Wir haben zwei Bahnen:  $\mathcal{P} = \{\infty\}$  und  $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ . Seien  $i$  und  $j$  die Inklusionen von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{O}$  in  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Die konstanten Garben auf diesen Bahnen liefern die perversen Garben

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathcal{P}} &:= i_* \mathbb{C}_{\mathcal{P}} \\
 \mathcal{L}_{\mathcal{O}} &:= \mathbb{C}_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}[1].
 \end{aligned}$$

Wir können Lemma 5.5 auf  $D_{B_{\text{St}}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$  und  $D_{T_{\text{St}}}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$  anwenden, da  $B_{\text{St}}/T_{\text{St}} \cong \mathbb{C}$  zusammenziehbar ist. Damit erhalten wir

$$\text{End}_{B_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) = \text{End}_{B_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{O}}) \cong \text{End}_{T_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{O}}),$$

und letzteres haben wir schon im vorigen Abschnitt berechnet. Wir haben also:

$$\text{End}_{B_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}})) = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightleftharpoons[a]{a} & \bullet \\ \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & & \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \end{array} \quad c \quad | \quad ca = bc = 0.$$

(Die Abbildung, die hier  $c$  heißt, ist die Verknüpfung  $a_- b_-$  aus dem vorigen Abschnitt.)  $\square$

## 5.4 Endomorphismen hochziehen

In diesem Abschnitt beweisen wir Lemma 5.4. Zur Erinnerung: Wir haben eine nützliche Nachbarschaft von Bahnen gegeben; die Vereinigung dieser Bahnen heiße  $X$ . Außerdem haben wir ein äquivariantes lokales System  $\bar{\gamma}$  auf  $X$  gegeben, das eine Nachbarschaft von äquivarianten lokalen Systemen definiert. Wir wollen zeigen, dass die Endomorphismen-Algebra  $\text{End}_K^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}))$  der direkten Summe der zugehörigen

einfachen perversen Garben isomorph zur entsprechenden Endomorphismen-Algebra  $\text{End}_{K_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}}))$  auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$  ist; hierbei sei  $\bar{\gamma}_{\text{St}}$  die konstante Garbe auf  $G_{\text{St}}/B_{\text{St}}$ .

*Beweis (von Lemma 5.4):* Sei  $s \in S$  die einfache Spiegelung zu der Nachbarschaft, die wir untersuchen wollen,  $\alpha \in \Pi$  die zugehörige einfache Wurzel, und sei  $\mathcal{O} \in V$  die kleine Bahn aus dieser Nachbarschaft (bzw. eine der kleinen Bahnen im  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$ -Fall). Sei  $x \in G$  ein Repräsentant von  $\mathcal{O}$  mit  $\kappa(x) \in {}^{\Gamma}\text{N}(T)$  (vgl. Definition 3.22). Wir erinnern uns an einige Definitionen aus den Abschnitten 3.4 und 3.10:

*Erinnerung:*

$$\begin{aligned} K_x &= x^{-1}Kx \\ P_s &= \text{Parabolische Untergruppe zu } s \\ U_s &= \text{Unipotentes Radikal von } P_s \\ T_s &= \ker \alpha \subset T \\ T_{\mathcal{O}} &= K_x \cap T = \{t \in T \mid \phi(\mathcal{O})(t) = t\} \\ A_{\mathcal{O}} &= T_{\mathcal{O}}/T_{\mathcal{O}}^0. \end{aligned}$$

Wir schauen uns nochmal an, wie in Abschnitt 3.4 eine Nachbarschaft von Bahnen auf den  $\text{PGL}_2$ -Fall reduziert wurde. In dem folgenden Diagramm sind die einzelnen Schritte aufgeführt; außerdem enthält es zwei neue Zwischenschritte 4 und 5.

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} 1. & K & \xrightarrow{\circ} KxP_s/B = X \\ & \uparrow \wr & \uparrow \wr \\ 2. & K_x & \xrightarrow{\circ} K_xP_s/B = K_x \times_{K_x \cap P_s} P_s/B \\ & \uparrow & \uparrow \\ 3. & K_x \cap P_s & \xrightarrow{\circ} P_s/B \\ & \downarrow & \parallel \\ 4. & K_{\text{St}}^2 := (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s) & \xrightarrow{\circ} P_s/B \\ & \downarrow & \parallel \\ 5. & K_{\text{St}}^1 := (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s T_s^0) & \xrightarrow{\circ} P_s/B \\ & \downarrow & \parallel \\ 6. & K_{\text{St}} = (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s T_s) & \xrightarrow{\circ} P_s/B \cong G_{\text{St}}/B_{\text{St}} \end{array}$$

Wir haben  $\bar{\gamma}$  auf  $X$  gegeben und wollen zeigen, dass  $\text{End}_K^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma})) \cong \text{End}_{K_{\text{St}}}^{\bullet}(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{\text{St}}))$  ist. Dazu werden wir  $\bar{\gamma}$  mit geeigneten Funktoren im Diagramm herunterdrücken, und zwar so, dass sich die Endomorphismen der zugehörigen perversen Nachbarschaft nicht ändern.

Genauer: Zu je zwei aufeinanderfolgenden Zeilen  $i$  und  $i + 1$  werden wir einen volltreuen Funktor  $\mathcal{F}_{i+1}^i$  von der unteren derivierten Kategorie in die obere angeben, dessen Bild  $\bar{\gamma}_i := (\mathcal{F}_i^{i-1})^{-1} \dots (\mathcal{F}_2^1)^{-1} \bar{\gamma}$  enthält. (Manche  $\mathcal{F}_{i+1}^i$  sind sogar Äquivalenzen von Kategorien.) All diese Funktoren  $\mathcal{F}_{i+1}^i$  sind „schön“ im folgenden Sinne:

(a) Sie kommutieren mit  $\mathcal{N}(\cdot)$ :  $\mathcal{F}_{i+1}^i(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{i+1})) \cong \mathcal{N}(\mathcal{F}_{i+1}^i(\bar{\gamma}_{i+1})) = \mathcal{N}(\bar{\gamma}_i)$ . Daraus folgt, dass die Endomorphismen-Algebren von  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_i)$  und  $\mathcal{N}(\bar{\gamma}_{i+1})$  gleich sind. Letztendlich erhalten wir  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma})) \cong \text{End}_{K_{\text{St}}}^\bullet(\mathcal{N}(\bar{\gamma}_6))$ .

(b) Alle  $\bar{\gamma}_i$  werden lokalkonstante Garben auf dem ganzen Raum sein. In  $\text{D}_{K_{\text{St}}}(P_s/B)$  ist die einzige solche Garbe die konstante Garbe; also ist  $\bar{\gamma}_6 = \bar{\gamma}_{\text{St}}$ . Damit ist dann das Lemma gezeigt.

Und nun zu den einzelnen Funktoren:

Von Zeile 1 nach Zeile 2 wird nur mit  $x$  konjugiert; das liefert eine Äquivalenz von Kategorien.

Von Zeile 2 nach Zeile 3 haben wir die *induction equivalence*.

Zwischen Zeile 3 und Zeile 4 liefert uns Lemma 4.9 eine Äquivalenz von Kategorien. (Die Aussage von Lemma 4.9 war: Herausteilen eines zusammenziehbaren Normalteilers, der trivial operiert – hier  $K_x \cap U_s$  – ändert nichts an der äquivarianten derivierten Kategorie.)

Für den Übergang von der 4. in die 5. Zeile brauchen wir das folgende Lemma, dessen Beweis wir auf den nächsten Abschnitt verschieben:

LEMMA 5.6.  $K_{\text{St}}^2 \cong K_{\text{St}}^1 \times A_{\mathcal{O}}$  (wobei die Surjektion  $K_{\text{St}}^2 \twoheadrightarrow K_{\text{St}}^1$ , die sich aus dieser Isomorphie ergibt, dieselbe wie die aus Diagramm (19) ist).

Da  $A_{\mathcal{O}} \cong \ker(K_{\text{St}}^2 \twoheadrightarrow K_{\text{St}}^1)$  trivial auf  $P_s/B$  operiert, folgt, dass die derivierte Kategorie  $\text{D}_{K_{\text{St}}^2}(P_s/B)$  in eine direkte Summe zerfällt aus lauter Komponenten, die äquivalent sind zu  $\text{D}_{K_{\text{St}}^1}(P_s/B)$ . (Sie unterscheiden sich nur in der Operation von  $A_{\mathcal{O}}$ .) Wir wählen als Funktor  $\mathcal{F}_5^4$  diejenige Inklusion  $\text{D}_{K_{\text{St}}^1}(P_s/B) \hookrightarrow \text{D}_{K_{\text{St}}^2}(P_s/B)$  aus, in deren Bild  $\bar{\gamma}_4$  liegt.

Bleibt der Übergang von der 5. in die 6. Zeile. Wir machen eine Fallunterscheidung danach, ob  $K_{\text{St}} \cong B_{\text{St}}$  oder  $K_{\text{St}} \cong T_{\text{St}}$  ist.

Im  $B_{\text{St}}$ -Fall ist

$$T_s = \{[* , \dots , * , \underbrace{*, *}_{k., k+1. \text{ Eintrag gleich}} , * , \dots , *]\}$$

( $k$  hängt von  $s$  ab). Insbesondere ist  $T_s$  zusammenhängend, und die Zeilen 5 und 6 sind einfach gleich.

Der Fall  $T_{\text{St}}$  ist kommt nur bei der  $s_*$ -Nachbarschaft im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall vor. Hier ist

$$T_s = \{[* , \dots , * , \pm 1]\} \quad \text{und} \\ T_s^0 = \{[* , \dots , * , 1]\} .$$

Die Abbildung  $K_{\text{St}}^1 \twoheadrightarrow K_{\text{St}}$  hat also  $\{1, -1\} \subset K_{\text{St}}^1$  als Kern. In dieser Situation (endlicher Kern, der trivial auf dem Raum operiert) besagt [BL94] 8.7.1: Die Restriktion  $\text{Res}_{K_{\text{St}}^1, K_{\text{St}}} : D_{K_{\text{St}}}(P_s/B) \rightarrow D_{K_{\text{St}}^1}(P_s/B)$  identifiziert  $D_{K_{\text{St}}}(P_s/B)$  mit der vollen Unterkategorie von  $D_{K_{\text{St}}^1}(P_s/B)$ , auf der  $\{1, -1\}$  trivial operiert.

$\mathcal{F}_6^5$  sei diese Restriktion. Zu prüfen ist noch, dass  $\bar{\gamma}_5$  im Bild von  $\mathcal{F}_6^5$  liegt.  $\bar{\gamma}_5$  lebt auf dem ganzen Raum  $P_s/B$ , insbesondere auch auf der punktförmigen Bahn  $B/B$ . Da  $K_{\text{St}}^1$  zusammenhängend ist, operiert  $-1$  dort immer trivial, also operiert  $-1$  auch trivial auf  $\bar{\gamma}_5$ .  $\square$

### 5.5 $K_{\text{St}}^2$ zerfällt

In diesem Abschnitt beweisen wir Lemma 5.6; dies ist das letzte, das zum Beweis von Satz 5.1 noch fehlt. Wir verwenden die Notationen aus dem vorigen Abschnitt. Insbesondere sei  $\mathcal{O} \in V$  wieder die/eine kleine Bahn der zu betrachtenden Nachbarschaft und  $x \in G$  ein Repräsentant von  $\mathcal{O}$  mit  $\kappa(x) \in {}^1N(T)$ .

*Beweis (von Lemma 5.6):* In Lemma 3.23 (a) haben wir

$$(20) \quad K_x \cap B \cong (K_x \cap U) \rtimes (K_x \cap T).$$

zeigt. Durch Einschränken auf  $K_x \cap U_s T_s^0 \subset K_x \cap B$  erhält man

$$K_x \cap U_s T_s^0 \cong (K_x \cap U_s) \rtimes (K_x \cap T_s^0).$$

Das liefert eine kurze exakte Sequenz

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} K_x \cap T_s^0 & \hookrightarrow & (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s) \twoheadrightarrow (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s T_s^0). \\ & \parallel \wr & \parallel \wr \\ & K_{\text{St}}^2 & K_{\text{St}}^1 \end{array}$$

Zunächst werden wir einen Gruppenhomomorphismus  $K_{\text{St}}^2 \twoheadrightarrow A_{\mathcal{O}}$  konstruieren. Danach werden wir zeigen, dass die Verknüpfung

$$K_x \cap T_s^0 \hookrightarrow K_{\text{St}}^2 \twoheadrightarrow A_{\mathcal{O}}$$

ein Isomorphismus ist. Wenn wir das haben, spaltet die Sequenz (21) in ein direktes Produkt, und wir haben  $K_{\text{St}}^2 \cong K_{\text{St}}^1 \times A_{\mathcal{O}}$ .

Konstruktion der Abbildung  $K_{\text{St}}^2 \twoheadrightarrow A_{\mathcal{O}}$ : Die Abbildung setzt sich folgendermaßen zusammen (Erklärung folgt):

$$\begin{array}{c} K_{\text{St}}^2 = (K_x \cap P_s)/(K_x \cap U_s) \\ (a) \parallel \\ (K_x \cap B)/(K_x \cap U_s) \\ (b) \downarrow \\ (K_x \cap B)/(K_x \cap B)^0 \\ (c) \parallel \wr \\ (K_x \cap T)/(K_x \cap T)^0 = T_{\mathcal{O}}/T_{\mathcal{O}}^0 = A_{\mathcal{O}} \end{array}$$

Für die Gleichheit (a) ist  $K_x \cap P_s = K_x \cap B$  zu zeigen. „ $\supset$ “ ist klar. Zu „ $\subset$ “: Die zu  $\mathcal{O}$  gehörende Bahn von  $K_{\text{St}} \dashrightarrow P_s/B$  ist  $(K_x \cap P_s)B/B$ . Da wir im  $T_{\text{St}}$ - oder im  $B_{\text{St}}$ -Fall sind, besteht sie nur aus einem Punkt, also  $(K_x \cap P_s)B/B = B/B$ . Daraus folgt  $K_x \cap P_s \subset B$ , und damit  $K_x \cap P_s \subset K_x \cap B$ .

Um die Surjektion (b) zu erhalten, ist  $K_x \cap U_s \subset (K_x \cap B)^0$  zu prüfen. Das liegt an  $U_s \subset B$  und daran, dass  $K_x \cap U_s$  zusammenhängend ist.

Die Isomorphie (c) folgt aus (20) (bzw. Lemma 3.23) und daraus, dass  $K_x \cap U$  zusammenhängend ist.

Wir haben jetzt den gewünschten Homomorphismus  $K_{\text{St}}^2 \rightarrow A_{\mathcal{O}}$ ; bleibt zu zeigen, dass die Verknüpfung  $K_x \cap T_s^0 \hookrightarrow K_{\text{St}}^2 \rightarrow A_{\mathcal{O}}$  ein Isomorphismus ist. Wir zeigen durch explizites Nachrechnen, dass  $K_x \cap T_s^0 = (K_x \cap T) \cap T_s^0 = T_{\mathcal{O}} \cap T_s^0$  genau ein Element in jeder Zusammenhangskomponente von  $T_{\mathcal{O}}$  hat; dann sind wir fertig.

$T_{\mathcal{O}}$  kennen wir aus Abschnitt 3.13 bzw. 3.15. Zunächst der Fall der  $B_{\text{St}}$ -Nachbarschaften (sowohl bei  $\text{SO}_{2n}$  als auch bei  $\text{SP}_{2n}$ ):

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{O}} &= \{[\pm 1, \dots, \pm 1, \underbrace{*}_k, \pm 1, \dots, \pm 1]\} \\ T_s &= T_s^0 = \{[* , \dots, *, \underbrace{*, *}_{k, k+1 \text{ Eintrag gleich}}, *, \dots, *]\} \\ T_{\mathcal{O}} \cap T_s^0 &= \{[\pm 1, \dots, \pm 1, \underbrace{\pm 1, \pm 1}_{k, k+1 \text{ Eintrag gleich}}, \pm 1, \dots, \pm 1]\} . \end{aligned}$$

Das hat offensichtlich genau ein Element in jeder Zusammenhangskomponente von  $T_{\mathcal{O}}$ .

Und jetzt noch die  $T_{\text{St}}$ -Nachbarschaft im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{O}} &= \{[\pm 1, \dots, \pm 1, *]\} \\ T_s &= \{[* , \dots, *, \pm 1]\} \\ T_s^0 &= \{[* , \dots, *, 1]\} \\ T_{\mathcal{O}} \cap T_s^0 &= \{[\pm 1, \dots, \pm 1, 1]\} . \end{aligned}$$

□

## KAPITEL 6

### Zusammenbauen

Jetzt haben wir alle nötigen Zutaten beisammen, um die gewünschte geometrische Ext-Algebra  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nützlich}})$  zu bestimmen. Als Ergebnis werden wir das erhalten, was in Theorem 1.6 behauptet wurde: Im  $\text{SO}_{2n}$ -Fall besteht  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nützlich}})$  aus zwei Kopien von

$$\begin{array}{c}
 \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xrightarrow{a_{n-1}} \bullet \xrightarrow{c} \bullet \\
 \xleftarrow{b_1} \quad \quad \quad \xleftarrow{b_{n-1}} \quad \quad \quad \curvearrowright c
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 a_{\mu+1}a_\mu = b_\mu b_{\mu+1} = 0 \\
 ca_{n-1} = b_{n-1}c = 0,
 \end{array}$$

und im  $\text{SP}_{2n}$ -Fall ist  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nützlich}})$  isomorph zu

$$\begin{array}{c}
 \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xrightarrow{a_{n-1}} \bullet \xrightarrow{a_n} \bullet \\
 \xleftarrow{b_1} \quad \quad \quad \xleftarrow{b_{n-1}} \quad \quad \quad \xleftarrow{b_n} \quad \quad \quad \bullet \\
 \\
 \bullet \xrightarrow{a_{-1}} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \xrightarrow{a_{-(n-1)}} \bullet \xrightarrow{a_{-n}} \bullet \\
 \xleftarrow{b_{-1}} \quad \quad \quad \xleftarrow{b_{-(n-1)}} \quad \quad \quad \xleftarrow{b_{-n}} \quad \quad \quad \bullet
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 a_{\pm(\mu+1)}a_{\pm\mu} = 0 \\
 b_{\pm\mu}b_{\pm(\mu+1)} = 0 \\
 b_{\pm n}a_{\mp n} = 0.
 \end{array}$$

Damit ist dann auch Theorem 1.4, das Ziel dieser Arbeit, fertig bewiesen. Bevor wir loslegen, noch ein Lemma:

**LEMMA 6.1.** *Sei  $X$  ein Raum,  $X = U \dot{\cup} F$  eine Zerlegung in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge, und seien  $j: U \hookrightarrow X$  und  $i: F \hookrightarrow X$  die Inklusionen. Seien  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  zwei perverse Garben auf  $X$  mit  $i^*\mathcal{L} = 0$  oder  $i^*\mathcal{L}' = 0$  (oder beides).  $\mathcal{L}'$  sei selbstdual. Dann ist*

$$R\text{Hom}_K(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \cong R\text{Hom}_K(j^*\mathcal{L}, j^*\mathcal{L}').$$

*Beweis:* Wie in (17) im Beweis von Satz 4.6 (in Abschnitt 4.5) haben wir ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\begin{array}{ccccc}
 R\text{Hom}(j_!j^*\mathcal{L}, \mathcal{L}') & \longleftarrow & R\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') & \longleftarrow & R\text{Hom}(i_!i^*\mathcal{L}, \mathcal{L}') \xleftarrow{+1} \\
 \parallel \wr & & & & \parallel \wr \\
 R\text{Hom}(j^*\mathcal{L}, j^*\mathcal{L}') & & & & R\text{Hom}(i^*\mathcal{L}, i^!\mathcal{L}') \\
 & & & & \text{da } \mathcal{L}' \text{ selbstdual } \parallel \wr \\
 & & & & R\text{Hom}(i^*\mathcal{L}, Di^*\mathcal{L}').
 \end{array}$$

Wegen  $i^*\mathcal{L} = 0$  oder  $i^*\mathcal{L}' = 0$  ist der rechte Term des Dreiecks 0, und wir erhalten einen Isomorphismus zwischen den linken beiden.  $\square$

### 6.1 Ext-Algebra zusammensetzen im Fall $\mathrm{SO}_{2n}$

In diesem Abschnitt bestimmen wir  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  im Fall  $\mathrm{SO}_{2n}$  (mit  $n \geq 2$ ). Zunächst eine Notation:

*Notation:* Sei  $\mu_1, \dots, \mu_l$  eine Menge von Indizes. Für die direkte Summe  $\mathcal{L}_{\mu_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{\mu_l}$  schreiben wir in Zukunft kurz  $\mathcal{L}_{\mu_1, \dots, \mu_l}$ .

Am Ende von Abschnitt 4.4 wurde festgestellt, dass  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  in eine direkte Summe  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, n}) \oplus \mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{-1, \dots, -n})$  zerfällt. Beide Summanden sind isomorph, es reicht also,  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, n})$  zu bestimmen.

Die Idee ist,  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, k+1})$  mit Induktion über  $k$  zusammenzubauen ( $k = 1, \dots, n-1$ ). Um im Induktionsschritt zu  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, k})$  ein weiteres  $\mathcal{L}_{k+1}$  hinzuzufügen, müssen wir die Homomorphismen zwischen  $\mathcal{L}_{k+1}$  und den  $\mathcal{L}_\mu$  für  $\mu \leq k+1$  bestimmen. Für  $\mu < k$  gibt es keine solchen Homomorphismen nach unseren Rechnungen im Hecke-Modul (Kapitel 4), und für  $\mu = k, k+1$  benutzen wir das Ergebnis aus Kapitel 5 über die Endomorphismen innerhalb einer Nachbarschaft.

Also an die Arbeit. Behauptung:

$$(22) \quad \mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, k+1}) = \begin{array}{c} \bullet \\ \mathcal{L}_1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xleftarrow{b_1} \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \mathcal{L}_2 \end{array} \dots \begin{array}{c} \bullet \\ \mathcal{L}_k \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{a_k} \\ \xleftarrow{b_k} \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \mathcal{L}_{k+1} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xleftarrow{c} \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ c \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a_{\mu+1}a_\mu = 0 \\ b_\mu b_{\mu+1} = 0 \\ ca_k = 0 \\ b_k c = 0 \end{array} \right.$$

(Alle Pfeile sind vom Grad 1.)

Für die folgende Rechnung schränken wir uns auf eine abgeschlossene Teilmenge  $X \subset G/B$  ein und zerlegen die noch weiter in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge:

$$\begin{array}{ccc} & G/B & \\ & \uparrow \iota & \\ & X := \left( \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \in V, \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_k}} \mathcal{O} \right) \cup \mathcal{O}_{k+1} & \\ j \nearrow & \uparrow i & \\ U := \mathcal{O}_k \cup \mathcal{O}_{k+1} & F := X \setminus U = \left( \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \in V, \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_k}} \mathcal{O} \right) \setminus \mathcal{O}_k & \end{array}$$

Die einfachen perversen Garben  $\mathcal{L}_\mu$  für  $1 \leq \mu \leq k+1$  haben alle Träger in  $X$ , also ist  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1, \dots, k+1}) = \mathrm{End}_K^\bullet(\iota^* \mathcal{L}_{1, \dots, k+1})$ . Da wir für den Rest des Abschnitts nur noch mit diesen Garben und nur noch auf  $X$  arbeiten, werden wir die Notation missbrauchen und für  $\iota^* \mathcal{L}_{\mu, \dots, \nu}$  nur noch  $\mathcal{L}_{\mu, \dots, \nu}$  schreiben.

Den Induktionsanfang ( $k = 1$ ) haben wir eigentlich schon: Aus Korollar 4.5 wissen wir, dass  $\mathcal{L}_{1,2}$  nur auf  $U = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  lebt, d. h.  $i^* \mathcal{L}_{1,2} = 0$ . Also liefert Lemma 6.1  $\mathrm{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,2}) = \mathrm{End}_K^\bullet(j^* \mathcal{L}_{1,2})$ , und letzteres haben wir in Satz 5.1 (a) berechnet. Bleibt der Induktionsschritt  $k-1 \rightarrow k$ .

Als graduierter Vektorraum ist  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k+1})$  die direkte Summe der  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu)$  für  $1 \leq \mu, \nu \leq k+1$ . Wir schauen uns diese Summanden einzeln an:

Die Summanden mit  $\mu \leq k$  und  $\nu \leq k$  kennen wir schon aus der Induktionsvoraussetzung.

Die restlichen Summanden sind die, bei denen auf einer Seite  $\mathcal{L}_{k+1}$  steht. Da  $i^*\mathcal{L}_{k+1} = 0$  ist (nach Korollar 4.5), können wir Lemma 6.1 auf diese Summanden anwenden. Wir erhalten (für  $\mu = k+1$  oder  $\nu = k+1$ )

$$(23) \quad \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu) \cong \text{Hom}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_\mu, j^*\mathcal{L}_\nu).$$

Wegen  $j^*\mathcal{L}_\mu = 0$  für  $1 \leq \mu \leq k-1$  (wieder nach Korollar 4.5) haben wir insbesondere

$$(24) \quad \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_{k+1}, \mathcal{L}_\mu) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_{k+1}) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \leq k-1.$$

((24) folgt auch direkt daraus, dass  $\mathcal{L}_\mu$  und  $\mathcal{L}_{k+1}$  keine gemeinsamen Summanden im Hecke-Modul haben; vgl. Korollar 4.7.)

Bleiben nur noch  $\text{Hom}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{k+1}, j^*\mathcal{L}_k)$ ,  $\text{Hom}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_k, j^*\mathcal{L}_{k+1})$  und  $\text{Hom}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{k+1}, j^*\mathcal{L}_{k+1})$ ; diese Homomorphismenräume haben wir aber bereits in Satz 5.1 (a) bestimmt.

Nachdem wir jetzt sämtliche  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu)$  als graduierte Vektorräume kennen, müssen wir noch die Verknüpfung berechnen. Dazu folgende Vorgehensweise: Wir suchen uns Elemente von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k+1})$ , von denen wir zeigen können, dass sie  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k+1})$  als Algebra erzeugen – allerdings zunächst noch einen Erzeuger mehr, als in (22) angegeben. (Gemeint sind nur die Erzeuger der Grade  $> 0$ .) Dann überprüfen wir, dass diese Erzeuger die in (22) angegebenen Relationen erfüllen. Schließlich werden wir den überflüssigen Erzeuger wieder los. Da die Dimensionen unserer Homomorphismenräume mit denen von (22) übereinstimmen, wissen wir dann, dass es nicht noch mehr Relationen gibt, und wir sind fertig.

Erzeuger-Suche: Aus der Induktionsvoraussetzung haben wir Elemente  $a_l, b_l$  für  $1 \leq l \leq k-1$  und  $c$ , die zusammen  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k})$  erzeugen. Wenn wir jetzt noch Elemente von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k+1})$  finden, deren Erzeugnis

$$\text{Rest} := \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k+1}) \oplus \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_{k+1}, \mathcal{L}_k) \oplus \text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{k+1})$$

enthält, haben wir genug Erzeuger.

Wir betrachten den Morphismus von Algebren

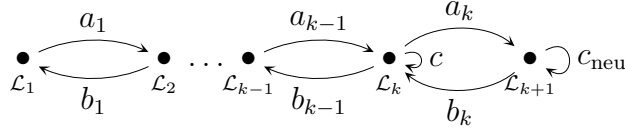
$$\rho: \text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,k+1}) \longrightarrow \text{End}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{1,\dots,k+1}) \cong \text{End}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{k,k+1}).$$

Aus Satz 5.1 haben wir

$$\text{End}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{k,k+1}) = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a'} \\ \xleftarrow{b'} \\ \curvearrowright c' \end{array} \bullet \quad | \quad c'a' = b'c' = 0,$$

d. h.  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$  erzeugen  $\text{End}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{k,k+1})$ . Gleichung (23) besagt, dass  $\rho|_{\text{Rest}}$  bijektiv ist. Wegen der Surjektivität von  $\rho|_{\text{Rest}}$  finden wir Urbilder  $a_k, b_k, c_{\text{neu}} \in \text{Rest}$  von  $a', b', c'$ , und wegen der Injektivität von  $\rho|_{\text{Rest}}$  erzeugen diese Urbilder  $\text{Rest}$ .

Damit haben wir genug Erzeuger. Das Bild unserer Ext-Algebra sieht im Moment so aus:



Nun zu den Relationen. Aus der Induktionsvoraussetzung haben wir

$$\begin{aligned} a_{\mu+1}a_\mu &= b_\mu b_{\mu+1} = 0 & \text{für } 0 \leq \mu \leq k-2 \\ ca_{k-1} &= b_{k-1}c = 0. \end{aligned}$$

Da  $c_{\text{neu}}a_k$  und  $b_k c_{\text{neu}}$  in  $\text{Rest}$  liegen und  $\rho|_{\text{Rest}}$  injektiv ist, folgt aus  $\rho(c_{\text{neu}}a_k) = c'a' = 0$  und  $\rho(b_k c_{\text{neu}}) = b'c' = 0$  schon

$$c_{\text{neu}}a_k = b_k c_{\text{neu}} = 0.$$

Und aus  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_{k+1}, \mathcal{L}_{k-1}) = 0$  und  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_{k-1}, \mathcal{L}_{k+1}) = 0$  folgt

$$a_k a_{k-1} = b_{k-1} b_k = 0.$$

Gut, die Relationen aus (22) sind alle erfüllt. Bleibt, den Erzeuger  $c$  loszuwerden. Annahme:  $c \notin \langle a_{k-1}b_{k-1}, b_k a_k \rangle_{\mathbb{C}}$ . Da  $\text{End}_K^2(\mathcal{L}_k)$  zweidimensional ist, müssen dann  $a_{k-1}b_{k-1}$  und  $b_k a_k$  linear abhängig sein.  $a_{k-1}b_{k-1}$  ist nach Induktionsvoraussetzung nicht 0, also gibt es ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $b_k a_k = z a_{k-1} b_{k-1}$ . Daraus folgt  $a_k b_k a_k = z a_k a_{k-1} b_{k-1} = 0$ . Das ist ein Widerspruch dazu, dass  $a_k b_k a_k$  ein Erzeuger von  $\text{Hom}_K^3(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_{k+1})$  ist.

## 6.2 Ext-Algebra zusammensetzen im Fall $\text{SP}_{2n}$

In diesem Abschnitt bestimmen wir  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  im Fall  $\text{SP}_{2n}$  (mit  $n \geq 1$ ). Hier nochmal die Behauptung:

$$\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \mathcal{L}_1 & & \mathcal{L}_2 & & \mathcal{L}_{n-1} & & \mathcal{L}_n \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xleftarrow{b_1} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{n-1}} \\ \xleftarrow{b_{n-1}} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_n} \\ \xleftarrow{b_n} \end{array} & & \bullet \\ & & & & & & \mathcal{L}_\infty \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \mathcal{L}_{-1} & & \mathcal{L}_{-2} & & \mathcal{L}_{-(n-1)} & & \mathcal{L}_{-n} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{-1}} \\ \xleftarrow{b_{-1}} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{-(n-1)}} \\ \xleftarrow{b_{-(n-1)}} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{-n}} \\ \xleftarrow{b_{-n}} \end{array} & & \bullet \end{array} \end{array} \left| \begin{array}{l} a_{\pm(\mu+1)}a_{\pm\mu} = 0 \\ b_{\pm\mu}b_{\pm(\mu+1)} = 0 \\ b_{\pm n}a_{\mp n} = 0 \end{array} \right.$$

Der Fall  $n = 1$  ist schon direkt mit Satz 5.1 (b) erledigt (vgl. Induktionsanfang vom  $\text{SO}_{2n}$ -Fall). Sei also ab jetzt  $n \geq 2$ .

Die Berechnung von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,n})$  und  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{-1,\dots,-n})$  geht genauso wie die Berechnung von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,n})$  im Fall  $SO_{2n}$ . Ergebnis:

$$(25) \quad \text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\pm 1,\dots,\pm n}) = \begin{array}{c} \bullet \xrightleftharpoons[a_{\pm 1}]{b_{\pm 1}} \bullet \dots \bullet \xrightleftharpoons[a_{\pm(n-1)}]{b_{\pm(n-1)}} \bullet \xrightarrow{c_{\pm}} \bullet \\ \mathcal{L}_{\pm 1} \quad \mathcal{L}_{\pm 2} \quad \mathcal{L}_{\pm(n-1)} \quad \mathcal{L}_{\pm n} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a_{\pm(\mu+1)}a_{\pm\mu} = 0 \\ b_{\pm\mu}b_{\pm(\mu+1)} = 0 \\ c_{\pm}a_{\pm(n-1)} = 0 \\ b_{\pm(n-1)}c_{\pm} = 0 \end{array} \right.$$

Zwischen  $\mathcal{L}_{1,\dots,n}$  und  $\mathcal{L}_{-1,\dots,-n}$  gibt es nach Korollar 4.7 keine Homomorphismen (weil sie keine gemeinsamen Summanden im Hecke-Modul haben).

Der Rest der Berechnung läuft analog zum Induktionsschritt der Berechnung im Fall  $SO_{2n}$ ; der einzige Unterschied ist, dass wir es mit einer  $T_{\text{St}}$ - statt mit einer  $B_{\text{St}}$ -Nachbarschaft zu tun haben. Sei wieder

$$\begin{array}{ccc} & & G/B \\ & \nearrow j & \nwarrow i \\ U := \mathcal{O}_n \cup \mathcal{O}_{-n} \cup \mathcal{O}_\infty & & F := X \setminus U. \end{array}$$

Um die Homomorphismen von und nach  $\mathcal{L}_\infty$  zu berechnen, können wir uns wegen  $i^*\mathcal{L}_\infty = 0$  wieder auf  $U$  einschränken. Ergebnis: Zwischen  $\mathcal{L}_\infty$  und  $\mathcal{L}_{\pm\mu}$  für  $\mu \leq n-1$  gibt es keine Homomorphismen, und die restlichen Homomorphismen liefert uns Satz 5.1 (b). Damit kennen wir wieder alle  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu)$  als graduierte Vektorräume.

Der nächste Schritt ist, Erzeuger von  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\text{nütz}})$  als Algebra zu finden. Für  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{1,\dots,n})$  und  $\text{End}_K^\bullet(\mathcal{L}_{-1,\dots,-n})$  haben wir die Erzeuger  $a_{\pm\mu}, b_{\pm\mu}$  ( $1 \leq \mu \leq n-1$ ) und  $c_{\pm}$ . Für den Rest nehmen wir uns wie im  $SO_{2n}$ -Fall Urbilder der Erzeuger  $a'_+, a'_-, b'_+$  und  $b'_-$  von

$$(26) \quad \text{End}_K^\bullet(j^*\mathcal{L}_{n,-n,\infty}) = \begin{array}{c} \bullet \xrightleftharpoons[a'_+]{b'_+} \bullet \xrightleftharpoons[a'_-]{b'_-} \bullet \\ i^*\mathcal{L}_n \quad i^*\mathcal{L}_\infty \quad i^*\mathcal{L}_{-n} \end{array} \quad | \quad b'_+a'_- = b'_-a'_+ = 0$$

und bezeichnen sie mit  $a_n, a_{-n}, b_n$  und  $b_{-n}$ .

Jetzt sind wieder die Relationen zu prüfen. Auch das geht wie bei  $SO_{2n}$ : Die meisten erhält man aus (25) oder (26), und

$$a_{\pm n}a_{\pm(n-1)} = b_{\pm(n-1)}b_{\pm n} = 0$$

folgt aus  $\text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_{\pm(n-1)}, \mathcal{L}_\infty) = \text{Hom}_K^\bullet(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_{\pm(n-1)}) = 0$ .

Bleibt wieder als letzter Schritt, die Erzeuger  $c_{\pm}$  loszuwerden. Auch diese Rechnung geht analog zum  $SO_{2n}$ -Fall.



## Literaturverzeichnis

- [ABV92] ADAMS, JEFFREY, DAN BARBASCH und DAVID A. VOGAN, JR.: *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Band 104 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [BBD82] BEILINSON, A. A., J. BERNSTEIN und P. DELIGNE: *Faisceaux pervers*. In: *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Band 100 der Reihe *Astérisque*, Seiten 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [BGS96] BEILINSON, ALEXANDER, VICTOR GINZBURG und WOLFGANG SOERGEL: *Koszul duality patterns in representation theory*. J. Amer. Math. Soc., 9(2):473–527, 1996.
- [BL94] BERNSTEIN, JOSEPH und VALERY LUNTS: *Equivariant sheaves and functors*, Band 1578 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Bou68] BOURBAKI, N.: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [GKM98] GORESKY, MARK, ROBERT KOTTWITZ und ROBERT MACPHERSON: *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*. Invent. math., 131:25–83, 1998.
- [GM83] GORESKY, MARK und ROBERT MACPHERSON: *Intersection homology II*. Invent. math., 72:77–129, 1983.
- [Kau00] KAUP, LUDGER: *Vorlesungen über Torische Varietäten*. Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik 130, Universität Konstanz, 2000.
- [Kho81] KHOROSHKIN, S. M.: *Irreducible representations of Lorentz groups*. Funct. Anal. Appl., 15:114–122, 1981.
- [KS90] KASHIWARA, MASAKI und PIERRE SCHAPIRA: *Sheaves on manifolds*, Band 292 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [LV83] LUSZTIG, GEORGE und DAVID A. VOGAN, JR.: *Singularities of closures of  $K$ -orbits on flag manifolds*. Invent. math., 71:365–379, 1983.
- [RS90] RICHARDSON, R. W. und T. A. SPRINGER: *The Bruhat order on symmetric varieties*. Geometriae Dedicata, 35:389–436, 1990.
- [RS93] RICHARDSON, R. W. und T. A. SPRINGER: *Combinatorics and geometry of  $K$ -orbits on the flag manifold*. Contemporary Mathematics, 153:109–142, 1993.
- [Ser94] SERRE, JEAN-PIERRE: *Cohomologie galoisienne*, Band 5 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Soe01] SOERGEL, WOLFGANG: *Langlands' philosophy and Koszul duality*. In: *Algebra—representation theory (Constanta, 2000)*, Band 28 der Reihe

- NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, Seiten 379–414. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [Spr81] SPRINGER, T. A.: *Linear algebraic groups*, Band 9 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1981.
- [Spr87] SPRINGER, T. A.: *The classification of involutions of simple algebraic groups*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 34(3):655–670, 1987.
- [Vog83] VOGAN, JR., DAVID A.: *Irreducible characters of semisimple Lie groups III*. Invent. math., 71:381–417, 1983.