OTTO H. KEGEL

Produkte nilpotenter Gruppen

Produkte nilpotenter Gruppen

Von

OTTO H. KEGEL

Eine Fragestellung von P. HALL ([1], [2]) verallgemeinernd warf WIELANDT 1951 [4] die Frage auf, ob eine endliche Gruppe stets auflösbar ist, wenn sie sich als Erzeugnis von paarweise miteinander vertauschbaren, nilpotenten Untergruppen darstellen läßt. Daß auch jede endliche, auflösbare Gruppe eine solche Darstellung zuläßt, hat HALL in [1] gezeigt. Eine Verallgemeinerung der Hallschen Charakterisierung endlicher, auflösbarer Gruppen ist enthalten in folgendem, die Wielandtsche Frage beantwortendem

Satz 1. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn sie nilpotente Untergruppen $G_1, \dots, G_k$ enthält, die $G_i G_j = G_j G_i$ für alle i, j ($1 \leq i, j \leq k$) und*

$$G_1 G_2 \cdots G_k = G$$

erfüllen.

Da es nach HALL in jeder endlichen, auflösbaren Gruppe G bereits Sylowgruppen von G gibt, die eine solche Faktorisierung von G leisten, so genügt es also, die Auflösbarkeit von G nachzuweisen, falls G eine Faktorisierung durch paarweise miteinander vertauschbare, nilpotente Untergruppen zuläßt. In [4], Satz 1 hat WIELANDT gezeigt, daß es ausreicht, dies für alle Produkte $G_i G_j = G_j G_i$ zu wissen. Satz 1 folgt daher aus dem spezielleren

Satz 2. *Läßt sich die Gruppe G in der Form $G = AB$ mit endlichen, nilpotenten A und B darstellen, so ist G auflösbar.*

Unter der Annahme, daß A und B teilerfremde Ordnungen haben, hat WIELANDT diesen Satz in [5] bewiesen. Dies ist in der Tat der Hauptteil des Beweises von Satz 2. Die Handhabe für die Erledigung des Falles, daß die Ordnungen von A und B nicht teilerfremd sind, liefert der folgende, wohl auch für sich interessante

Satz 3. *Die endliche Gruppe G ist genau dann nicht-einfach, wenn es Untergruppen A und B , $A \neq 1 \neq B$, von G gibt derart, daß A mit jeder zu B konjugierten Untergruppe B^g von G vertauschbar ist, und außerdem $G \neq AB$ gilt. — A oder B ist dann in einem echten Normalteiler von G enthalten.*

Beweis. Ist G nicht-einfach, dann setze man $A = B = N$, wobei N ein nicht-trivialer Normalteiler von G ist. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt. — Um sich ihres Hinreichens zu vergewissern, betrachte man Untergruppen A und B von G , die der Voraussetzung des Satzes genügen. Sei A_1 maximal unter den Unter-

gruppen von G , die zusammen mit B den Voraussetzungen des Satzes genügen und A enthalten. Ist A_1 Normalteiler von G , so sind wir fertig. Also können wir annehmen, daß $N(A_1) \neq G$ ist. Ist das Element h von G nicht im Normalisator $N(A_1)$ enthalten, dann ist $\{A_1, A_1^h\} \neq A_1$, und $\{A_1, A_1^h\}$ ist mit B und allen seinen Konjugierten vertauschbar. Wegen der Maximalität von A_1 ist dann $G = \{A_1, A_1^h\} B$.

Es gilt nun $B \subseteq N(A_1)$; denn gäbe es ein $b \in B$, $b \notin N(A_1)$, so wäre $G \neq A_1 B = \{A_1, A_1^h\} B = G$, was nicht geht. — Aber A_1 ist auch maximal unter den mit B^g die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllenden Untergruppen von G . Daher ist $B^g \subseteq N(A_1)$ für jedes $g \in G$. Also ist $\{B^g\} \subseteq N(A_1)$; und da A_1 in G nicht normal ist, so $\{B^g\}$ ein B enthaltender, echter Normalteiler von G .

Bemerkung. Satz 3 enthält eine wesentliche Verallgemeinerung eines Satzes von SZÉP [3]. — Daß Satz 3 allgemein in Gruppen gilt, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen, also in Noetherschen Gruppen, ist klar. — Ohne Einschränkungen gilt Satz 3 in folgender Form: *Eine (beliebige) Gruppe G ist genau dann nicht-einfach, wenn es zwei Untergruppen A und B , $A \neq 1 \neq B$, von G gibt, so daß A mit B^g für jedes $g \in G$ vertauschbar ist und $AB \neq G$, jedoch $\{A, A^h\} B = G$ gilt für jedes $h \in G$, das A nicht normalisiert.*

Beweis von Satz 2. Angenommen, der Satz sei nicht richtig; dann gäbe es unter den endlichen Gruppen, die Gegenbeispiele bilden, eine Gruppe G von minimaler Ordnung: $G = AB = BA$ ist nicht auflösbar, aber die Faktoren A und B sind nilpotent. Nach [5] können wir daraus schließen: $(o(A), o(B)) = 1$.

Ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(A)$ und $o(B)$, so sind (nach [4], Satz 8) die p -Sylowgruppen A_p und B_p von A bzw. B miteinander vertauschbar. Nun ist aber $G = AB^g$ für jedes $g \in G$ (denn g hat die Form $g = ba$, also ist $G = AB^a = AB^{ba} = AB^g$); daher ist A_p mit B_p^g für jedes $g \in G$ vertauschbar. Da G nicht auflösbar ist, also auch keine p -Gruppe, so ist $A_p B_p \neq G$. Damit erfüllen A_p und B_p in G die Voraussetzungen von Satz 3, und G ist nicht-einfach.

Ist K ein minimaler Normalteiler von G , so ist G/K durch AK/K und BK/K nilpotent faktorisiert und daher — wegen der Minimalität von G — auflösbar. Da G aber nicht auflösbar ist, so ist K ein direktes Produkt isomorpher, nicht-abelscher, einfacher Gruppen.

Wäre nun AK eine echte Untergruppe von G , so ergibt der Dedekindsche Modulsatz, daß $AK = A(AK \cap B)$ nilpotent faktorisiert ist; und aus der Minimalität von G folgt, daß AK — und damit natürlich auch K — auflösbar ist. Das kann aber nicht sein; denn K ist nicht auflösbar. Daher ist $AK = BK = G$. Die Nilpotenz von A , B und G/K ergibt dann: $KA_p = KB_p$ ist ein Normalteiler von G .

Nun ist A_p mit jeder zu B_p unter G konjugierten Untergruppe vertauschbar, also auch mit jeder zu B_p unter KA_p konjugierten Untergruppe. Da aber KA_p keine p -Gruppe ist, so folgt aus Satz 3, daß entweder A_p oder B_p in einem echten Normalteiler von KA_p liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man daher annehmen, A_p liege in einem echten Normalteiler von KA_p . Sei L die normale Hülle von A_p in KA_p , i. e. der kleinste Normalteiler von KA_p , der A_p enthält. Dann folgt aus dem Modulsatz und aus $L \neq KA_p$

$$L = (L \cap K) A_p \text{ mit } D = L \cap K \neq K.$$

Jeder Automorphismus von KA_p , der A_p festläßt, läßt auch die normale Hülle L von A_p in KA_p fest; insbesondere läßt ein solcher Automorphismus von KA_p auch den Durchschnitt $D = L \cap K$ fest (denn als maximaler perfekter Normalteiler von KA_p ist K sogar charakteristisch). Nun induziert aber die Untergruppe A von G in dem Normalteiler KA_p von G eine Gruppe von Automorphismen, die natürlich A_p festläßt. Daher ist A im Normalisator von D enthalten. Aber D ist als Normalteiler von K direkter Faktor von K , und $G = KA$; daher ist D normal in G . Nun ist aber K minimaler Normalteiler von G ; wegen $D \neq K$ ist also $D = 1$.

Wegen $L = DA_p = A_p$ heißt das, daß A_p Normalteiler von G ist. Als p -Gruppe ist A_p auch auflösbar. Aber G/A_p ist nilpotent faktorisiert, also — wegen der Minimalität von G — auflösbar. Daher ist G auflösbar. Dies widerspricht jedoch der Annahme, G sei nicht auflösbar. Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches Gegenbeispiel geben kann. — Damit ist Satz 2 (und also auch Satz 1) bewiesen.

Für Anwendungen erweist sich der folgende Zusatz zu Satz 2 manchmal als nützlich:

Zusatz. Ist $G = AB$ mit nilpotenten (endlichen) A und B , und ist $A \neq G \neq B$, so ist entweder A oder B in einem echten Normalteiler von G enthalten*).

Beweis. Sei der Zusatz für alle Gruppen bewiesen, deren Ordnungen kleiner sind als $o(G)$. — Ist G eine Primärgruppe, so ist alles gezeigt, denn jede maximale Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ist Normalteiler. Daher kann man annehmen, $o(G)$ enthält mindestens zwei verschiedene Primteiler.

Sei N ein minimaler Normalteiler von G , und gelte $AN \neq G \neq BN$, so erfüllen die Untergruppen AN/N und BN/N die Voraussetzungen des Zusatzes in G/N , also liegt — nach Induktionsvoraussetzung — eine von beiden (o. B. d. A. die Gruppe AN/N) in einem echten Normalteiler M/N von G/N ; also liegt A in M , und der Zusatz stimmt in G . — Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, daß für jeden minimalen Normalteiler N von G entweder $AN = G$ oder $BN = G$ (oder beides) gilt.

Sei N ein minimaler Normalteiler von G , und gelte $AN = G$; dann ist $o(N)$ eine Potenz einer Primzahl p , denn G ist nach Satz 2 auflösbar. Sei A_p die p -Sylowgruppe der nilpotenten Gruppe A ; dann ist $A_p N$ eine p -Sylowgruppe von G und außerdem Normalteiler von G . Ist B also eine p -Gruppe, so ist B in dem echten Normalteiler $A_p N$ von G enthalten, und der Zusatz gilt.

Man darf daher annehmen, daß $o(B)$ außer p noch einen Primteiler q ($\neq p$) besitzt. Nach [4], Satz 8 ist die q -Sylowgruppe A_q von A mit der q -Sylowgruppe B_q von B vertauschbar, und $A_q B_q$ ist eine q -Sylowgruppe von G . Da $[G : A]$ eine p -Potenz ist, so ist jede q -Sylowgruppe von A bereits eine q -Sylowgruppe von G ; daher ist B_q in A_q enthalten. Dann liegen mit B_q auch alle zu B_q konjugierten Untergruppen von G in A_q und daher auch der von ihnen erzeugte Normalteiler M . Da M in A liegt, so ist nach unserer einleitenden Bemerkung $MB = G$ anzunehmen. Das heißt: $A_q B_q = MB_q = A_q$ ist ein Normalteiler von G , und $[G : B]$ ist eine q -Potenz.

*) Zusatz bei der Korrektur am 27.3.1961: Unter Benutzung von Satz 2 hat inzwischen auch Herr Z. JANKO unabhängig diese Aussage bewiesen.

Hat $o(G)$ nur die Primteiler p und q , so sind die p -Sylowgruppe NA_p und die q -Sylowgruppe A_q von G Normalteiler; G ist also nilpotent. Dann gilt aber der Zusatz; denn in einer nilpotenten Gruppe ist jede maximale Untergruppe Normalteiler.

Hat $o(G)$ aber noch einen dritten Primteiler r ($p \neq r \neq q$), so ist die r -Sylowgruppe B_r von B in der r -Sylowgruppe A_r von A enthalten. Weil aber $[G : B]$ eine q -Potenz ist, so ist jede r -Sylowgruppe von B bereits r -Sylowgruppe von G , so daß also $A_r = B_r$ eine r -Sylowgruppe von G ist. Da A und B nilpotent sind, so ist A_r ein Normalteiler von G . Es gilt jedoch $AA_r = A \neq G \neq B = BB_r$; die Existenz eines solchen Normalteilers war jedoch eingangs ausgeschlossen worden. — Damit ist der Zusatz bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] P. HALL, A characteristic property of soluble groups. J. London Math. Soc. **12**, 198—200 (1937).
- [2] P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc., II. Ser., **43**, 316—323 (1937).
- [3] J. SZÉP, Bemerkung zu einem Satz von Ore. Publ. Math. Debrecen **3**, 81—82 (1953).
- [4] H. WIELANDT, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).
- [5] H. WIELANDT, Über Produkte nilpotenter Gruppen. Illinois J. Math. **2**, 611—618 (1958).

Eingegangen am 24. 11. 1960

Anschrift des Autors:

Otto H. Kegel

Mathematisches Seminar der Universität

Frankfurt (Main)