OTTO H. KEGEL

Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen

Originalbeitrag erschienen in:
Archiv der Mathematik 78 (1962), S. 205 - 221

KEGEL, O. H.
Math. Zeitschr. 78, 205–221 (1962)

Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen

Von

OTTO H. KEGEL

Im allgemeinen ist das Produkt zweier Untergruppen A und B einer Gruppe G, also die Menge aller Elemente g von G von der Form $g=ab$ mit $a\in A$, $b\in B$ keine Gruppe. Ist dies aber der Fall, so nennt man die Untergruppen A und B miteinander vertauschbar. Normalteiler von G sind mit allen Untergruppen von G vertauschbar.

Ist nun eine Untergruppe A von G mit „vielen" Untergruppen von G vertauschbar, so liegt es nahe zu vermuten, daß G nicht einfach ist und daß man über die Lage von A im Verband aller Untergruppen von G eine Aussage machen kann. So hat ORE in [4] gezeigt, daß A in G subnormal ist, falls A mit allen Untergruppen der endlichen Gruppe G vertauschbar ist. Allgemein gilt (KEGEL [2], Satz 3):

Ist die Untergruppe A $(\neq 1)$ mit der Untergruppe B $(\neq 1)$ der endlichen Gruppe G sowie mit sämtlichen Konjugierten von B in G vertauschbar und ist $AB\neq G$, so besitzt G einen nicht-trivialen Normalteiler, der entweder A oder B enthält.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden nun die Voraussetzungen des oben erwähnten Oreschen Resultats wesentlich abgeschwächt. Trotzdem erhält man das Ergebnis:

Die Gesamtheit der Untergruppen von G, die mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar sind, bildet einen (im allgemeinen echten) Teilverband des Verbandes aller Subnormalteiler von G. — Ist G perfekt, so stimmt dieser Verband mit dem Verband aller Normalteiler von G überein*.

Eine notwendige Bedingung für die Subnormalität der Untergruppe A in der endlichen Gruppe G ist

(*) Für jede p-Sylow-Gruppe S von G und für jede Primzahl p ist $A\cap S$ eine p-Sylow-Gruppe von A.

Ist die Untergruppe A mit der p-Sylow-Gruppe S von G vertauschbar, so ist $A\cap S$ eine p-Sylow-Gruppe von A. Also ist die Bedingung (*) eine Abschwächung der Forderung, daß A mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar sei.

*) Wie mir Herr SZÉP mitteilt, ergibt sich der letzte Teil dieses Resultats auch in einer Arbeit von N. ITÔ und J. SZÉP, die in den Acta Sci. Math. Szeged erscheint. Andererseits ergeben sich die Ergebnisse jener Arbeit leicht aus den Resultaten des ersten Teils dieser Arbeit.

Ob aber die Eigenschaft (*) bereits hinreichend ist für die Subnormalität von A in G, haben wir nicht entscheiden können. Jedoch werden wir im zweiten Teil dieser Arbeit Verschärfungen von (*) angeben, die sowohl notwendig als auch hinreichend dafür sind, daß A in G subnormal ist. So gilt zum Beispiel:

Die Untergruppe A der endlichen Gruppe G ist genau dann subnormal in G, wenn A die Bedingung (*) erfüllt, und wenn außerdem jeder perfekte, einköpfige Subnormalteiler T von A mit jedem seiner Konjugierten in G vertauschbar ist.

Auf dem Wege zum Beweise dieser Sätze werden einige Nebenresultate von vielleicht unabhängigem Interesse hergeleitet, etwa das Nichteinfachheitskriterium Satz 6. Alle diese Resultate werden wir in einem etwas allgemeineren Rahmen gewinnen, der sich ergibt, wenn wir Bedingungen wie (*) nur für Primzahlen p aus einer vorgegebenen Primzahlmenge π fordern.

Es sei noch folgender Satz erwähnt, der ein Gegenstück zu einem Wielandtschen Resultat [7] darstellt:

Die Untergruppe A der endlichen Gruppe G ist genau dann subnormal in G, wenn für jeden Normalteiler N von G jeder minimale Normalteiler von G/N im Normalisater von AN/N liegt.

Herrn Professor Dr. R. BAER bin ich für zahlreiche wertvolle Ratschläge und Hinweise zu großem Dank verpflichtet.

BEZEICHNUNGEN UND DEFINITIONEN

Sei U eine Untergruppe der Gruppe G.

U^G = Menge aller $U^g = g^{-1}Ug$ mit $g \in G$.
U_G = Durchschnitt aller U^g mit $g \in G$.
$\mathfrak{N}(U)$ = Normalisator von U in G.
$\mathfrak{Z}(U)$ = Zentrum von U.
$\mathfrak{C}(U)$ = Zentralisator von U in G.

Untergruppen A und B von G heißen *vertauschbar*, wenn für sie Erzeugnisbildung und Komplexmultiplikation gleichwertig sind:

$$\{A, B\} = AB = BA.$$

$o(G)$ = Ordnung von G.

π bezeichnet in dieser Arbeit stets eine Menge von Primzahlen.

π-Element = Element, dessen Ordnung nur Primteiler in π hat.

π-Gruppe = Gruppe, deren Ordnung nur Primteiler in π hat, oder (für endliche Gruppen) gleichwertig, die nur aus π-Elementen besteht.

π-Zahl = natürliche Zahl, die nur Primteiler in π hat.

Die Gruppe G heißt *perfekt*, wenn sie mit ihrer Kommutatorgruppe G' übereinstimmt.

Die Gruppe G heißt *einköpfig*, wenn sie genau einen maximalen Normalteiler ($\neq G$) besitzt.

Die Untergruppe U von G heißt *subnormal* in (ein *Subnormalteiler* von) G, wenn U in einer Kompositionsreihe von G auftritt. Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

§ 1. π-Quasinormalteiler

Bei der Betrachtung vertauschbarer Untergruppen einer endlichen Gruppe erweisen sich die folgenden beiden wohlbekannten Hilfssätze (man vgl. etwa ORE [3], p. 159 und [4], p. 433) oft als nützlich:

HILFSSATZ 1. *Ist die Untergruppe A mit den Untergruppen B und C von G vertauschbar, so auch mit dem Erzeugnis $\{B, C\}$.*

HILFSSATZ 2. *Die Untergruppen A und B der Gruppe G sind genau dann miteinander vertauschbar, wenn gilt*

$$o(\{A, B\}) = o(A)\, o(B) : o(A \cap B).$$

ORE definiert in [4]: Eine Untergruppe U der endlichen Gruppe G heiße *quasinormal*, wenn U mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist. — Wir wollen diese Forderung abschwächen und die Vertauschbarkeit nur für gewisse Sylow-Gruppen von G fordern:

DEFINITION 1. Die Untergruppe U der endlichen Gruppe G heiße *π-quasinormal* (ein π-Quasinormalteiler), wenn $UP = PU$ für jede p-Sylow-Gruppe P von G und jedes p aus der Primzahlmenge π gilt. (Ist π die leere Menge, so ist 1 die einzige π-Untergruppe von G, und jede Untergruppe von G ist π-quasinormal.)

Bilder π-quasinormaler Untergruppen von G unter Epimorphismen von G sind im Bild von G wieder π-quasinormal; denn bei Epimorphismen gehen Sylow-Gruppen in Sylow-Gruppen über und Vertauschbarkeitseigenschaften bleiben erhalten.

Ist U ein π-Quasinormalteiler von G und V einer von H, so ist $U \times V$ ein π-Quasinormalteiler von $G \times H$. — Außerdem gilt der

HILFSSATZ 3. *Enthält die Untergruppe R den π-Quasinormalteiler U von G, so ist U auch π-quasinormal in R.*

BEWEIS. Sei Q eine p-Sylow-Gruppe von R mit $p \in \pi$. Dann gibt es eine p-Sylow-Gruppe P von G mit $P \cap R = Q$; und nach dem Dedekindschen Modulsatz gilt nun

$$UQ = U(P \cap R) = UP \cap R = PU \cap R = (P \cap R)\, U = QU.$$

HILFSSATZ 4. *Ist der π-Quasinormalteiler U von G mit der Untergruppe V von G vertauschbar, dann ist $U \cap V$ ein π-Quasinormalteiler von V.*

BEWEIS. Nach Hilfssatz 3 ist U ein π-Quasinormalteiler von UV. Zu jeder vorgegebenen p-Sylow-Gruppe Q von V gibt es eine $Q = P \cap V$ erfüllende p-Sylow-Gruppe P von UV. Ist $p \in \pi$, so ist $UP = PU$, wobei aus Hilfssatz 2 $PU = (P \cap V)\, U = QU$ folgt. Nach dem Dedekindschen Modulsatz gilt nun $PU \cap V = QU \cap V = Q(U \cap V)$. Da $Q(U \cap V)$ eine Gruppe ist, so gilt $Q(U \cap V) = (U \cap V)\, Q$, und $U \cap V$ ist ein π-Quasinormalteiler von V.

BEMERKUNG. Genau so wie Hilfssatz 4 beweist man, daß der Durchschnitt eines Quasinormalteilers U von G mit einer Untergruppe V von G quasinormal in V ist. — Dagegen ist aber der Durchschnitt zweier Quasinormalteiler von G im allgemeinen kein Quasinormalteiler, dies zeigt etwa das folgende, einfache Beispiel, auf das mich Herr ITÔ aufmerksam machte: Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $A = \{a, b; a^{p^2} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p}\}$, und sei G das direkte Produkt von A mit einer zyklischen Gruppe $\{z\}$ der Ordnung p. Dann sind A und $B = \{b\} \times \{z\}$ Quasinormalteiler von G, aber $\{b\} = A \cap B$ ist nicht mit der Untergruppe $\{za\}$ vertauschbar, also nicht quasinormal in G.

HILFSSATZ 5. *Ist M ein maximaler π-Quasinormalteiler, der in G nicht normal ist, so ist entweder jedes π-Element von G bereits in M enthalten und M ist also insbesondere eine maximale Untergruppe von G, oder der Index $[G:M]$ ist Potenz einer Primzahl p aus π.*

BEWEIS. Sind alle π-Elemente von G bereits in M enthalten, so ist die Forderung, daß M ein π-Quasinormalteiler sei, keine Einschränkung; M ist dann also eine maximale Untergruppe von G. — Angenommen nun, es gebe π-Elemente außerhalb von M; sei Q der von allen π-Elementen von G erzeugte Normalteiler. Dann ist $MQ = G$; denn sonst wäre nach Hilfssatz 1 die Untergruppe $MQ \neq G$ ein π-Quasinormalteiler von G, der M echt enthält, dies aber widerspräche der Maximalität von M.

Da M nicht normal ist, so gibt es wenigstens ein p-Element g für ein passendes $p \in \pi$, das M nicht normalisiert. Angenommen, $[G:M] = p^\alpha m$, $(p, m) = 1$, sei $m \neq 1$; dann gilt für eine p-Sylow-Gruppe P von G, die g enthält

$$M < \{M, M^g\} \leqq MP \neq G.$$

$\{M, M^g\}$ ist also wegen Hilfssatz 1 eine echte π-quasinormale Untergruppe von G, die M echt enthält. Dies widerspricht der Maximalität von M. — Daher ist $m = 1$, und $[G:M]$ ist Potenz einer Primzahl p aus π.

Ein ähnliches Argument ergibt den etwas schärferen

HILFSSATZ 6. *Sei M maximal unter den π-Quasinormalteilern von G derart, daß $[G:M]$ keine π_1-Zahl sei für eine festgewählte Teilmenge π_1 von π $(\emptyset \leqq \pi_1 \leqq \pi)$. Sei Q der von allen π_1-Elementen von G erzeugte Normalteiler. Dann ist $Q \leqq \mathfrak{N}(M)$, und entweder gilt $G = MQ$; oder aber $Q \leqq M$, und M ist ein maximaler π-Quasinormalteiler von G.*

BEWEIS. Es gilt $Q \leqq \mathfrak{N}(M)$; denn gäbe es ein π_1-Element g von Primzahlpotenzordnung mit $g \notin \mathfrak{N}(M)$, und wäre P eine Sylow-Gruppe von G mit $g \in P$, so hätte man $M < \{M, M^g\} \leqq MP$, und $[G:M]$ unterschiede sich von $[G:\{M, M^g\}]$ nur um einen π_1-Faktor; d. h. $[G:\{M, M^g\}]$ wäre ebenfalls keine π_1-Zahl. Aber nach Hilfssatz 1 wäre mit M auch $\{M, M^g\}$ ein π_1-Quasinormalteiler von G, so daß wir einen Widerspruch gegen die Maximalität von M bekämen.

Angenommen nun: $QM \neq G$. Dann ist nach Hilfssatz 1 die Untergruppe QM ein π-Quasinormalteiler von G. Nun sind aber alle π_1-Elemente von G bereits in Q enthalten, daher kann $[G:QM]$ keine π_1-Zahl sein. Wegen der

Maximalität von M heißt das, $QM=M$, und daher $Q\leqq M$. — Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 7. *Ist π_1 ($\geqq\emptyset$) eine Teilmenge der Primzahlmenge π, und ist M maximal unter den π-Quasinormalteilern von G derart, daß $[G:M]$ keine π_1-Zahl ist. Enthält π alle Primteiler von $o(G)$, so ist M ein Normalteiler von G.*

BEWEIS. Angenommen, M sei nicht normal in G; dann ist nach den Hilfssätzen 5 und 6 der Index $[G:M]$ Potenz einer Primzahl p aus π. Sei π_2 die Primzahlmenge, die verbleibt, wenn man aus π die Primzahl p herausnimmt: $\pi_2=\pi-p$; dann ist $[G:M]$ keine π_2-Zahl. Sei T der von allen π_2-Elementen von G erzeugte Normalteiler. Aus Hilfssatz 6 folgt: $T\leqq M$. In der p-Gruppe G/T ist M/T in einem echten Normalteiler N/T enthalten. Daher enthält N auch M. Aber M war ein maximaler π-Quasinormalteiler; daher haben wir $M=N$. Dies widerspricht der Annahme, M sei nicht normal in G.

Hilfssatz 7 enthält als Spezialfall einen Satz von ORE über Quasinormalteiler ([4], p. 438, Theorem 16). Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ([4], p. 438, Theorem 19) ist enthalten in

SATZ 1. *Ist die π-Untergruppe U ein π-Quasinormalteiler von G, so ist U subnormal in G.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz sei für π-Gruppen falsch; dann gibt es eine π-Gruppe minimaler Ordnung G, die eine π-quasinormale, aber nicht subnormale Untergruppe U enthält. Nun ist U aber in einer maximalen π-quasinormalen Untergruppe N von G enthalten. Nach Hilfssatz 7 ist N Normalteiler in G. Der Minimalität von G wegen ist der π-Quasinormalteiler U ein Subnormalteiler von N, also auch von G. Das widerspricht der Annahme, U sei nicht subnormal. — Damit gilt Satz 1 für π-Gruppen.

Besitze nun $o(G)$ einen Primteiler, der nicht in π enthalten ist. — Seien V eine maximale π-quasinormale π-Untergruppe von G, g ein π-Element von Primzahlpotenzordnung, das V nicht normalisiert und P eine p-Sylow-Gruppe von G, die g enthält. Dann ist $V<\{V, V^g\}\leqq VP$. Aber $\{V, V^g\}$ ist nach Hilfssatz 1 ein π-Quasinormalteiler von G, und weil VP eine π-Gruppe ist, so ist es auch $\{V, V^g\}$. Das widerspricht aber der Maximalität von V. — Also normalisiert jedes π-Element von G den π-Quasinormalteiler V. Aber dann ist V Normalteiler der charakteristischen Untergruppe K von G, die von allen π-Elementen von G erzeugt wird. — Da V als maximaler π-Normalteiler von K eine charakteristische Untergruppe von K ist, so ist V auch charakteristisch in G.

Nun ist aber jede π-quasinormale π-Untergruppe von G in einer maximalen, also in V enthalten und nach Hilfssatz 3 auch ein π-Quasinormalteiler von V. In der π-Gruppe V ist aber jeder π-Quasinormalteiler nach dem ersten Teil dieses Beweises subnormal und damit auch in G. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

HILFSSATZ 8. *Ist der Subnormalteiler U mit der p-Sylow-Gruppe P von G vertauschbar, so ist $U(p)$, die von allen Elementen von U mit zu p primer Ordnung erzeugte Untergruppe von U, Normalteiler von UP. Ebenfalls ist $K(U)$, der kleinste Normalteiler von U, mit auflösbarer Faktorgruppe normal in UP.*

BEWEIS. Alle q-Sylow-Gruppen von UP mit $q \neq p$ liegen in dem Subnormalteiler U, also auch in $U(p)$, und $U(p)$ ist eine charakteristische Untergruppe von UP. — Jede charakteristische Untergruppe von $U(p)$ is somit auch in UP charakteristisch. — Da nun $K(U)=K\big(U(p)\big)=K(UP)$ gilt, so ist $K(U)$ sogar charakteristische Untergruppe von UP.

Hilfssatz 1 besagt, daß die Vereinigung zweier π-Quasinormalteiler von G wieder π-quasinormal ist. Dasselbe gilt wenigstens auch für Durchschnitte π-quasinormaler Subnormalteiler. Dies zeigt der

SATZ 2. *Die π-quasinormalen Subnormalteiler von G bilden einen (im allgemeinen echten) Teilverband des Verbandes aller Subnormalteiler von G.*

BEWEIS. Sind U und V zwei π-quasinormale Subnormalteiler von G, so sind Durchschnitt und Vereinigung von U und V wieder subnormal in G (WIELANDT [5], Satz 7); wegen Hilfssatz 1 ist $\{U, V\}$ auch π-quasinormal. Um Satz 2 zu beweisen, müssen wir daher nur zeigen, daß $U \cap V$ auch ein π-Quasinormalteiler von G ist.

Sei $p \in \pi$ und P eine beliebige p-Sylow-Gruppe von G. Hilfssatz 9 besagt, daß $P \leqq \mathfrak{N}\big(U(p)\big)$ und $P \leqq \mathfrak{N}\big(V(p)\big)$. Daraus folgt

$$P \leqq \mathfrak{N}\big(U(p)\big) \cap \mathfrak{N}\big(U(p)\big) \leqq \mathfrak{N}\big(U(p) \cap V(p)\big).$$

Nun ist aber $[U \cap V\colon U(p) \cap V(p)]$ eine p-Potenz; denn $U(p)$ enthält sämtliche q-Elemente von U für jede Primzahl $q \neq p$; ebenso enthält $V(p)$ sämtliche q-Elemente von V für jede Primzahl $q \neq p$. Daher enthält $U(p) \cap V(p)$ alle q-Elemente von $U \cap V$, so daß $[U \cap V\colon U(p) \cap V(p)]$ eine p-Potenz sein muß. — Also ist $U(p) \cap V(p)$ mit jeder p-Sylow-Gruppe P_1 von $U \cap V$ vertauschbar: $U \cap V = P_1\big(U(p) \cap V(p)\big)$. Da $U \cap V$ aber ein Subnormalteiler von G ist, so hat die p-Sylow-Gruppe P von G mit $U \cap V$ eine p-Sylow-Gruppe P_1 von $U \cap V$ gemein. Da P_1 in P enthalten ist, so ist es auch mit P vertauschbar. Wegen $P \leqq \mathfrak{N}\big(U(p) \cap V(p)\big)$ ist nach Hilfssatz 1 die Untergruppe $P_1\big(U(p) \cap V(p)\big) = U \cap V$ mit P vertauschbar. — Diese Überlegung gilt für jedes $p \in \pi$ und für jede p-Sylow-Gruppe P von G. Damit ist gezeigt, daß $U \cap V$ in G auch π-quasinormal ist, und Satz 2 ist bewiesen.

BEMERKUNG. Da nach Satz 1 jede π-quasinormale π-Untergruppe von G subnormal ist, so gilt folgende Ergänzung zu Satz 2:

Ist $\pi_1 \leqq \pi$, so bilden die π-quasinormalen π_1-Untergruppen von G einen (im allgemeinen echten) Teilverband des Verbandes der Subnormalteiler von G. — (Denn die Vereinigungsgruppe zweier π_1-Untergruppe von G, die subnormal sind, ist wieder eine π_1-Untergruppe von G, (WIELANDT [5], Satz 7).

In Satz 2 kann man die Voraussetzung, daß U und V subnormal sind, nicht ganz fallen lassen. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL. Sei G die einfache Gruppe der Ordnung 60. Der Normalisator einer 2-Sylow-Gruppe von G ist eine echte 5-quasinormale Untergruppe von G. Nimmt man nun den Normalisator einer anderen 2-Sylow-Gruppe von G und bildet den Durchschnitt D dieser Normalisatoren, so hat D die Ordnung 3, da die 2-Sylow-Gruppen von G nur das Einselement gemein haben. D kann

aber nicht 5-quasinormal sein; denn sonst erfüllten die 5-Sylow-Gruppe F von G und D die Voraussetzungen von (KEGEL [2], Satz 1), und G wäre nicht-einfach.

SATZ 3*). *Ist die Untergruppe U mit jeder Sylow-Gruppe von G vertauschbar; dann folgt aus jeder der beiden Aussagen*

(i) *U ist perfekt, und* (ii) *G ist perfekt,*

daß U sogar Normalteiler von G ist. — $K(U)$, der kleinste Normalteiler von U mit auflösbarer Faktorgruppe, ist stets normal in G.

BEWEIS. Da U mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar ist, so ist U subnormal in G nach Satz 1. Nach Hilfssatz 8 ist $K(U)=K\big(U(p)\big)$ Normalteiler von UP für jede p-Sylow-Gruppe P von G und für jede Primzahl p. Damit ist aber $K(U)$ Normalteiler von G. — Da U perfekt ist, so ist $K(U)=U$. Daher folgt aus (i), daß U Normalteiler von G ist.

Um zu zeigen, daß auch (ii) die Normalität von U nach sich zieht, nehmen wir an, der Satz sei falsch und G sei ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung. Sei U von kleinster Ordnung unter den Untergruppen von G, die zwar mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar, aber keine Normalteiler von G sind. Sicherlich ist $K(U)$ Normalteiler von G. Aber $G/K(U)$ ist auch perfekt; wäre nun $K(U)\neq 1$, so wäre wegen der Minimalität von G die Untergruppe $U/K(U)$ normal in $G/K(U)$. Das hieße aber, daß U in G normal ist, was wir ausgeschlossen hatten. Also ist $K(U)=1$, und U ist auflösbar. — Ein minimaler Subnormalteiler V der auflösbaren Gruppe U hat Primzahlordnung p; da U selbst nach Satz 1 Subnormalteiler von G ist, so ist auch V subnormal in G, und $\{V^G\}$ ist ein p-Normalteiler von G. Nun ist aber $U\cap\{V^G\}$ nach Satz 2 auch mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar. Ist $U\neq U\cap\{V^G\}$ $(\neq 1)$, so ist wegen der Minimalität von U der Subnormalteiler $U\cap\{V^G\}$ normal in G. Wegen der Minimalität von G ist dann $U/\big(U\cap\{V^G\}\big)$ normal in $G/\big(U\cap\{V^G\}\big)$, und daher wäre U normal in G, was wir aber ausgeschlossen hatten. — Es ist also $U\subseteqq\{V^G\}$, und U ist eine p-Gruppe. Nach Hilfssatz 8 wird nun U für jede Primzahl $q\neq p$ von jeder q-Sylow-Gruppe von G normalisiert, also auch von $G(p)$, der von allen Elementen mit zu p primer Ordnung in G erzeugten Untergruppe von G. Da G perfekt ist, ist aber $G(p)=G$; und damit ist U Normalteiler von G. Das widerspricht aber unserer Annahme über U und G. — Es kann daher kein solches Gegenbeispiel G geben; dies beweist den Satz.

BEMERKUNG. Ähnlich wie aus (ii) kann man die Normalität von U auch folgern aus

(iii) *U wird von seinen π-Elementen erzeugt und G von seinen π'-Elementen* (dabei sei π' die Menge aller Primzahlen außerhalb der Primzahlmenge π).

SATZ 4. *Ist die Untergruppe U von G mit allen Sylow-Gruppen von G vertauschbar, dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(i) *U ist Normalteiler von G.*

*) vgl. Fußnote S. 205.

(ii) *Die π-Untergruppe U ist normal in jeder sie enthaltenden π-Untergruppe von G; π sei die Menge der Primteiler von $o(U)$.*

(iii) *Zu jeder Primzahl p gibt es eine p-Sylow-Gruppe P von G, so daß $U \cap P$ normal in P ist.*

BEWEIS. Daß (ii) und (iii) Folgen aus (i) sind, ist klar. — Erfülle U die Bedingung (ii). Sei $p \notin \pi$, P eine p-Sylow-Gruppe von G, dann ist $U \cap P = 1$ ein Normalteiler von P. Ist aber $p \in \pi$, so ist U nach (ii) in UP normal. Das heißt $U \cap P$ ist normal in der p-Sylow-Gruppe P von G. — Damit folgt (iii) aus (ii).

Erfülle U nun die Bedingung (iii). Sei P eine p-Sylow-Gruppe von G so, daß $P \cap U$ normal in P ist. Nach Hilfssatz 8 ist $U(p)$ normal in UP. Nach unserer Wahl von P ist $U \cap P$ normal unter P, also ist $U(p)(U \cap P) = U$ normal in UP. Daher enthält $\mathfrak{N}(U)$ mindestens eine p-Sylow-Gruppe von G für jede Primzahl p. Also ist $\mathfrak{N}(U) = G$. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2. π-Subnormalteiler

Subnormalteiler U von G werden von einer Sylow-Gruppe S von G stets längs einer Sylow-Gruppe $U \cap S$ von U geschnitten. Die Frage liegt nahe, ob diese Eigenschaft die Subnormalteiler unter den Untergruppen von G kennzeichnet. Diese Frage konnten wir nur unter zusätzlichen Voraussetzungen bejahen, werden sie jedoch zunächst in allgemeiner Form angreifen.

DEFINITION 2. Die Untergruppe U der endlichen Gruppe G heißt *π-subnormal* (ein *π-Subnormalteiler*), wenn für jedes p aus der Primzahlmenge π und für jede p-Sylow-Gruppe P von G der Durchschnitt $U \cap P$ eine p-Sylow-Gruppe von U ist.

Jeder Subnormalteiler von G ist π-subnormal. Aus Hilfssatz 2 folgt, daß auch die π-Quasinormalteiler von G π-subnormal sind. — Ist π die leere Menge, so ist jede Untergruppe von G ein π-Subnormalteiler. Leicht aus Definition 2 folgt der allgemeinere

SATZ 5. *In der endlichen Gruppe G sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *Jede Untergruppe von G ist ein π-Subnormalteiler.*

(ii) *Jede Untergruppe von G ist ein π-Quasinormalteiler.*

(iii) *Die Menge aller π-Elemente von G erzeugt einen nilpotenten Normalteiler von G.*

BEWEIS. Ist in G die Bedingung (iii) erfüllt, so ist für jedes $p \in \pi$ die p-Sylow-Gruppe von G normal in G, und (ii) gilt. Daß aus (ii) auch (i) folgt, hatten wir oben bemerkt.

Es gelte (i) in G. Wir dürfen annehmen $\pi \neq \emptyset$. Dann sind auch die p-Sylow-Gruppen P für $p \in \pi$ von G π-subnormal. Ist aber die p-Sylow-Gruppe von G ein p-Subnormalteiler, so ist P in jeder p-Sylow-Gruppe von G enthalten; d.h., P ist Normalteiler von G. Bildet man das direkte Produkt dieser p-Sylow-Gruppen von G für alle $p \in \pi$, so ist dies ein nilpotenter Normalteiler von G, der sämtliche π-Elemente von G enthält. Damit folgt auch (iii) aus (i).

Sei $\mathfrak{S}_\pi$ *die Menge aller π-Subnormalteiler* von G.

DEFINITION 3. Die Untergruppe U der endlichen Gruppe G heißt *streng π-subnormal*, wenn $U \cap V$ für jedes $V \in \mathfrak{S}_\pi$ ein π-Subnormalteiler von V ist.

Da $G \in \mathfrak{S}_\pi$, so ist insbesondere jede streng π-subnormale Untergruppe von G auch π-subnormal. Die Umkehrung gilt jedoch nicht; dies zeigt in der einfachen Gruppe der Ordnung 60 der Normalisator N einer 5-Sylow-Gruppe: N ist 2-subnormal, aber $N \cap N^g$ hat die Ordnung 2 (falls $N^g \neq N$) und kann nicht 2-subnormal in N sein, denn $N \cap N^g$ ist eine 2-Sylow-Gruppe von N, die 2-Sylow-Gruppen von N haben aber nur das Einselement gemein.

HILFSSATZ 9. *Ist U ein (strenger) π-Subnormalteiler von G und σ ein Epimorphismus von G auf H, so ist U^σ ein (strenger) π-Subnormalteiler von H; ist umgekehrt V ein π-Subnormalteiler von H, so ist $V^{\sigma^{-1}}$ ein π-Subnormalteiler von G.*

BEWEIS. Sei $p \in \pi$ und U ein π-Subnormalteiler von G. Ist Q eine p-Sylow-Gruppe von H, so gibt es eine p-Sylow-Gruppe P von G mit $P^\sigma = Q$. Dann ist $U \cap P$ eine p-Sylow-Gruppe von U und also $(U \cap P)^\sigma \subseteqq U^\sigma \cap Q$ eine p-Sylow-Gruppe von U^σ. Also ist sogar $U^\sigma \cap Q = (U \cap P)^\sigma$ eine p-Sylow-Gruppe von U^σ.

Sei nun V ein π-Subnormalteiler von H und Q eine p-Sylow-Gruppe von H mit $p \in \pi$. Dann ist $V \cap Q$ eine p-Sylow-Gruppe von V. Also enthält $(V \cap Q)^{\sigma^{-1}} = V^{\sigma^{-1}} \cap Q^{\sigma^{-1}}$ eine p-Sylow-Gruppe P von $V^{\sigma^{-1}}$ und $Q^{\sigma^{-1}}$ eine p-Sylow-Gruppe P_1 von G mit $P_1 \cap V^{\sigma^{-1}} = P$. Nach dem Satz von SYLOW erhält man jede p-Sylow-Gruppe von $Q^{\sigma^{-1}}$, indem man P_1 mit einem passenden Element k aus dem Kern von σ transformiert. Aber der Kern von σ liegt in $V^{\sigma^{-1}}$. Dies bedeutet jedoch, daß sich unter der Transformation mit k die Ordnung des Durchschnitts $P_1 \cap V^{\sigma^{-1}}$ nicht ändert. Daher hat jede p-Sylow-Gruppe von $Q^{\sigma^{-1}}$ eine p-Sylow-Gruppe von $V^{\sigma^{-1}}$ mit $V^{\sigma^{-1}}$ gemein, und $V^{\sigma^{-1}}$ ist also ein π-Subnormalteiler von G.

Um zu zeigen, daß U^σ ein strenger π-Subnormalteiler von H ist, falls U streng π-subnormal in G ist, betrachte man die Untergruppe $V^{\sigma^{-1}}$ von G, wobei V ein beliebiger π-Subnormalteiler von H sei. Nach Voraussetzung ist $U \cap V^{\sigma^{-1}}$ ein π-Subnormalteiler von $V^{\sigma^{-1}}$. Es ist

$$(U^\sigma \cap V)^{\sigma^{-1}} = V^{\sigma^{-1}} \cap (U^\sigma)^{\sigma^{-1}} = V^{\sigma^{-1}} \cap UN,$$

wobei N der Kern von σ ist. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt nun $V^{\sigma^{-1}} \cap UN = (V^{\sigma^{-1}} \cap U)N$. Also ist $(U \cap V^{\sigma^{-1}})^\sigma = V \cap U^\sigma$. — Die Beschränkung von σ auf $V^{\sigma^{-1}}$ bildet also den π-Subnormalteiler $V^{\sigma^{-1}} \cap U$ von $V^{\sigma^{-1}}$ auf den π-Subnormalteiler $V \cap U^\sigma$ von V ab.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

HILFSSATZ 10. *Enthält die Untergruppe V von G den π-Subnormalteiler U von G, so ist U auch π-subnormal in V.*

BEWEIS. Ist P eine p-Sylow-Gruppe von V, so gibt es eine p-Sylow-Gruppe Q von G mit $P = Q \cap V$. Ist nun $p \in \pi$, so ist $P \cap U = (Q \cap U) \cap U = Q \cap U$ eine p-Sylow-Gruppe U.

HILFSSATZ 11. *Ein π-Subnormalteiler eines π-Subnormalteilers von G ist π-subnormal in G; entsprechendes gilt für strenge π-Subnormalteiler. — Die Relation (strenger) π-Subnormalteiler zu sein ist transitiv.*

BEWEIS. Sei V ein π-Subnormalteiler von G, und sei U ein π-Subnormalteiler von V; dann gilt für jede p-Sylow-Gruppe P von G und für jedes $p \in \pi$: $P \cap U = (P \cap V) \cap U$. Aber $P \cap V$ ist eine p-Sylow-Gruppe von V, also ist $P \cap U = (P \cap V) \cap U$ eine p-Sylow-Gruppe von U; und U ist π-subnormal in G.

Sei U streng π-subnormal in V und V streng π-subnormal in G. Sei X ein beliebiger π-Subnormalteiler von G; dann ist $X \cap V$ ein π-Subnormalteiler von V und nach dem ersten Teil dieses Beweises auch in G. Daher ist $X \cap V$ nach Hilfssatz 10 auch π-subnormal in V. Dann ist aber $(X \cap V) \cap U$ ein π-Subnormalteiler von $X \cap V$, also auch von X. — Daher ist U streng π-subnormal in G.

HILFSSATZ 12. *Ist der π-Subnormalteiler U von G mit der Untergruppe V von G vertauschbar, so ist $U \cap V$ ein π-Subnormalteiler von V.*

BEWEIS. Sind die Untergruppen U und V von G miteinander vertauschbar, so gibt es nach WIELANDT ([6], Satz 6) für jedes p eine p-Sylow-Gruppe P von UV, die das Produkt einer p-Sylow-Gruppe P_1 von U und einer p-Sylow-Gruppe P_2 von V derart ist, daß $P_1 \cap P_2$ eine p-Sylow-Gruppe von $U \cap V$ ist.

Nach Hilfssatz 10 ist in der Situation des Hilfssatzes 12 U in UV ein π-Subnormalteiler. Ist $p \in \pi$, und P_2 eine beliebige p-Sylow-Gruppe von V, so ist P_2 in einer p-Sylow-Gruppe P von UV enthalten, die den π-Subnormalteiler U in einer p-Sylow-Gruppe P_1 von U trifft. Wir wollen zeigen, daß $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P$ gilt. Nach obigem Resultat von WIELANDT und nach Hilfssatz 2 gilt daher

$$o(\{P_1, P_2\}) \geqq o(P_1)\, o(P_2) : o(P_1 \cap P_2) \geqq o(P);$$

denn $P_1 \cap P_2$ ist in einer p-Sylow-Gruppe von $U \cap V$ enthalten. Nun sind aber P_1 und P_2 Untergruppen von P, so daß $o(P) \geqq o(\{P_1, P_2\})$ gilt. Daraus folgt die Gleichheit dieser Zahlen und daher — mittels Hilfssatz 2 — die Vertauschbarkeit von P_1 und P_2. — Andererseits folgt daraus auch, daß $P_1 \cap P_2$ eine p-Sylow-Gruppe von $U \cap V$ ist. Da dies für jede p-Sylow-Gruppe P_2 von V gilt, so ist $U \cap V$ eine π-subnormale Untergruppe von V.

Im Kontrast zu Hilfssatz 12 ist im allgemeinen der Durchschnitt $U \cap V$ zweier π-Subnormalteiler U und V nicht π-subnormal in G (nicht einmal in V); dies zeigt das bereits auf S. 213 gegebene Beispiel des Normalisators einer 5-Sylow-Gruppe in der einfachen Gruppe der Ordnung 60.

Dagegen gilt aber der folgende

HILFSSATZ 13. *Sind U und V strenge π-Subnormalteiler von G, so ist auch $U \cap V$ streng π-subnormal in G.*

BEWEIS. Sei X ein π-Subnormalteiler von G; dann ist $X \cap U$ in G auch π-subnormal, also auch $(X \cap U) \cap V = X \cap (U \cap V)$.

Eine interessante Eigenschaft der strengen π-Subnormalteiler ist, daß bereits die Existenz eines strengen π-Subnormalteilers $U \neq G$ von G mit

$(\pi, o(U)) \neq 1$ (d.h. mindestens ein Primteiler von $o(U)$ liegt in π) die Nichteinfachheit von G nach sich zieht. Dies ist enthalten in

SATZ 6. *Wird die streng π-subnormale Untergruppe U von G von ihren π-Elementen erzeugt, so ist U subnormal in G.*

BEWEIS. Sei $p \in \pi$. Wir beweisen den Satz 6 zunächst für den Fall, daß der strenge π-Subnormalteiler U bereits für ein $p \in \pi$ von seinen p-Elementen erzeugt wird.

Angenommen, der Satz sei falsch für diesen Fall; dann gibt es unter den endlichen Gruppen, die Untergruppen enthalten, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, von ihren p-Elementen erzeugt werden, aber nicht subnormal sind, eine Gruppe G minimaler Ordnung. Sei U eine von ihren p-Elementen erzeugte streng π-subnormale Untergruppe von G, die in G nicht subnormal ist. Sei P eine p-Sylow-Gruppe von G und $\mathfrak{Z}(P)$ ihr Zentrum.

a) *G ist nicht einfach, und $\{\mathfrak{Z}(P)^G\} \subseteq \mathfrak{N}(U)$.* — Sei P_1 eine p-Sylow-Gruppe von U und $g \in \mathfrak{N}(P_1)$. Nach Hilfssatz 13 ist dann auch $U \cap U^g$ streng π-subnormal in G; außerdem gilt $P_1 \subseteq U \cap U^g$. Da $U \cap U^g$ die p-Sylow-Gruppe P_1 von U enthält und π-subnormal in U ist, so enthält $U \cap U^g$ jede p-Sylow-Gruppe von U. Aber U wird von seinen p-Elementen erzeugt. Daher gilt $U = U^g$, und $\mathfrak{N}(P_1) \subseteq \mathfrak{N}(U)$. Ist P eine p-Sylow-Gruppe von G, die P_1 enthält, so gilt für das Zentrum $\mathfrak{Z}(P)$ die Beziehung $\mathfrak{Z}(P) \subseteq \mathfrak{N}(P_1) \subseteq \mathfrak{N}(U)$. Da U aber π-subnormal ist, so gilt $\mathfrak{Z}(P) \subseteq \mathfrak{N}(U)$ für jede p-Sylow-Gruppe P von G. Es ist also $(1 \neq) Z = \{\mathfrak{Z}(P)^G\} \subseteq \mathfrak{N}(U)$. Z ist ein echter Normalteiler von G, da U kein Subnormalteiler sein sollte, also erst recht kein Normalteiler.

b) *Es gilt $U \not\subseteq N$ für jeden echten Normalteiler N von G;* denn alle Voraussetzungen des Satzes gelten auch in N; der Minimalität von G wegen wäre U in N aber subnormal und damit auch in G.

c) *Für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G ist die Untergruppe UN/N von G/N subnormal;* denn unter Homomorphismen geht eine von ihren p-Elementen erzeugte Gruppe in eine von ihren p-Elementen erzeugte Gruppe über, UN/N erfüllt also nach Hilfssatz 9 die Voraussetzungen des Satzes in G/N. Aber wegen $N \neq 1$ gilt $o(G/N) < o(G)$, so daß wegen der Minimalität von G die Untergruppe UN/N in G/N subnormal ist. Daher ist auch UN subnormal in G.

Wäre nun $UN \neq G$, so wäre wegen der Transitivität der π-Subnormalität (Hilfssatz 11) jeder π-Subnormalteiler der subnormalen Untergruppe UN auch in G selbst π-subnormal. Also wäre U bereits in UN streng π-subnormal. Wegen der Minimalität von G wäre dann aber U subnormal in UN, also auch in G; dies widerspräche aber unserer Annahme über U. — Daher gilt

d) *Für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G gilt $UN = G$.*

Wählen wir nun den nicht-trivialen Normalteiler $N \subseteq Z \subseteq \mathfrak{N}(U)$, dann folgt aber aus d), daß U Normalteiler von G ist. Dies widerspricht der Annahme, U sei nicht subnormal. — Es kann daher kein solches G geben; damit ist der Satz bewiesen für streng π-subnormale Untergruppen, die von ihren p-Elementen erzeugt werden für ein festes $p \in \pi$.

Sei nun U ein strenger π-Subnormalteiler von G, der von seinen π-Elementen erzeugt wird; sei $p \in \pi$ und $C_p(U)$ die von allen p-Elementen von U erzeugte Untergruppe von U. Nach Hilfssatz 11 ist auch $C_p(U)$ ein strenger π-Subnormalteiler von G. Aus dem ersten Teil dieses Beweises folgt nun, daß $C_p(U)$ in G subnormal ist. — Da U von seinen π-Elementen erzeugt wird, ist es Produkt seiner charakteristischen Untergruppen $C_p(U)$, wobei p alle Primzahlen aus π durchläuft. Als Vereinigung endlich vieler Subnormalteiler der Form $C_p(U)$ ist auch U ein Subnormalteiler von G. — Damit ist Satz 6 bewiesen.

Sei nun $\mathfrak{M}$ eine Funktion, die auf einer Klasse endlicher Gruppen erklärt ist und die jeder Gruppe G, für die $\mathfrak{M}$ definiert ist, eine nicht-leere Menge $\mathfrak{M}(G)$ von Untergruppen von G zuordnet.

DEFINITION 4. Eine solche Funktion $\mathfrak{M}$ heiße *subnormal*, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

A I: Ist $\mathfrak{M}$ für G erklärt, so ist $\mathfrak{M}$ auch für jedes homomorphe Bild G^σ von G erklärt, und es gilt $(\mathfrak{M}(G))^\sigma \subseteq \mathfrak{M}(G^\sigma)$.

A II: Ist $\mathfrak{M}$ auf G erklärt, so auch auf allen Normalteilern von G.

A III: Ist $U \in \mathfrak{M}(G)$, und ist U in einem Normalteiler N von G enthalten, so gilt $U \in \mathfrak{M}(N)$.

A IV: Ist U ein minimales Element $\neq 1$ von $\mathfrak{M}(G)$, so ist $U \cap U^g$ ein π-Subnormalteiler von U für jedes $g \in G$ und die Menge π aller Primzahlen.

AV: Ist $U \in \mathfrak{M}(G)$, so ist U ein π-Subnormalteiler von G für die Menge π aller Primzahlen.

Triviale Beispiele subnormaler Funktionen stellen die Funktionen dar, die jeder endlichen Gruppe die Menge ihrer Subnormalteiler oder die Menge ihrer Normalteiler zuordnen. — Daß es keine schwächere subnormale Funktion gibt als die, die G seine Subnormalteiler zuordnet, rechtfertigt die Benennung dieser Funktionenklasse als *subnormal:*

SATZ 7. *Ist $\mathfrak{M}$ eine subnormale Funktion auf einer Klasse endlicher Gruppen, so ist $\mathfrak{M}(G)$ — falls definiert — eine Menge subnormaler Untergruppen von G.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz ist falsch; dann gibt es unter den Gruppen, für die $\mathfrak{M}$ definiert ist und in denen der Satz falsch ist, eine Gruppe G von minimaler Ordnung. Sei U ein Element von $\mathfrak{M}(G)$ minimal derart, daß U in G nicht subnormal ist. Sei N ein minimaler Normalteiler ($\neq 1$) von G; dann ist wegen A I und der Minimalität von G die Untergruppe UN/N subnormal in G/N; also ist auch UN subnormal in G. Als Subnormalteiler $\neq G$ wäre UN in einem echten Normalteiler V von G enthalten; wegen A III wäre dann $U \in \mathfrak{M}(V)$, und wegen der Minimalität von G ist U subnormal in V und damit in G; das hatten wir aber ausgeschlossen. Daher gilt

a) *Für jeden Normalteiler N ($\neq 1$) von G gilt $UN = G$; insbesondere ist*

$$U_G = U_N = \bigcap_{g \in N} U^g = 1.$$

b) *U ist ein minimales Element $\neq 1$ von $\mathfrak{M}(G)$.* — In [7] zeigt WIELANDT nämlich, daß jeder minimale Normalteiler von G jeden Subnormalteiler von G normalisiert. Wäre U nicht minimal in $\mathfrak{M}(G)$, so gäbe es ein $V \subseteq \mathfrak{M}(G)$,

$1 \neq V \subsetneq U$. Wegen der Wahl von U ist V subnormal in G, wird also von jedem minimalen Normalteiler N von G normalisiert. Da heißt aber $V = \bigcap_{g \in N} V^g \subseteq U_G = 1$. Wegen $V \neq 1$ ist dies ein Widerspruch. Daher kann es ein solches V nicht geben, und U ist minimal in $\mathfrak{M}(G)$.

c) *G ist nicht-einfach.* — Sei T die Untergruppe von U, die von allen p-Elementen, p ein Primteiler von $o(U)$, von U erzeugt wird. Sei P_1 eine p-Sylow-Gruppe von U. Sei $g \in \mathfrak{N}(P_1)$. Es gilt $T \cap T^g \subseteq U \cap U^g$. Aber wegen A IV ist $U \cap U^g$ ein p-Subnormalteiler von U, und nach der Auswahl von g enthält $U \cap U^g$ eine p-Sylow-Gruppe von U und damit alle. Dann ist aber $T \cap T^g = T$, und $g \in \mathfrak{N}(T)$. Sei nun Z das Erzeugnis der Zentren aller p-Sylow-Gruppen von G für dies feste p; dann gilt $Z \subseteq \mathfrak{N}(T)$. Es gilt $(1 \neq)\ Z \neq G$; denn wäre $Z = G$, so wäre T normal in G mit $T \subseteq U$, was nach a) jedoch nicht sein kann.

Wegen $Z \neq 1$ folgt nun aber aus a), daß $UZ = G$ ist. Nach c) ist $Z \subseteq \mathfrak{N}(T)$; das bedeutet: $1 \neq T = \bigcap_{g \in Z} T^g \subseteq U_Z = U_G = 1$. Dieser Widerspruch zeigt, daß es keine endliche Gruppe G der geforderten Art geben kann, daß Satz 7 also stimmt.

BEMERKUNG. Sei $\mathfrak{M}$ die Funktion, die der Gruppe G für die Menge π aller Primzahlen alle auflösbaren π-Subnormalteiler von G zuordnet. Es ist klar, daß $\mathfrak{M}$ alle Bedingungen einer subnormalen Funktion erfüllt außer — vielleicht — A IV. Um einzusehen, daß $\mathfrak{M}$ auch A IV erfüllt ist, erinnere man sich an die Transitivität der π-Subnormalität; dann ist es klar, daß minimale, auflösbare π-Subnormalteiler $\neq 1$ Primzahlordnung haben; dann haben natürlich zwei verschiedene den π-subnormalen Durchschnitt 1. Man erhält daher die Aussage:

Auflösbare π-Subnormalteiler U von G sind subnormal, falls die Primzahlmenge π alle Primteiler von $o(U)$ umfaßt. (Dies hätte man auch direkt induktiv aus der Tatsache schließen können, daß p-subnormale p-Untergruppen von G in jeder p-Sylow-Gruppe von G liegen und so subnormal sind.) Diese Aussage umfaßt natürlich auch den Fall, daß ganz G auflösbar ist, und verallgemeinert so einen von R. W. CARTER ([1], p. 625) angegebenen Satz.

Das Produkt aller minimalen Normalteiler von G — den *Sockel* von G — bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(G)$.

SATZ 8. *Für die π-Untergruppe U der endlichen Gruppe G sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *U ist Subnormalteiler von G.*

(ii) *U ist ein strenger π-Subnormalteiler von G.*

(iii) *U ist ein π-Subnormalteiler von G, und jeder perfekte, einköpfige Normalteiler T von U ist mit jedem seiner Konjugierten T^g, $g \in G$, vertauschbar.*

(iv) *U ist ein π-Subnormalteiler von G, und für jeden Normalteiler K von G gilt: $UK \cap U^g K$ ist für jedes $g \in G$ ein π-Subnormalteiler von UK.*

(v) *Für jeden Normalteiler K von G gilt: $\mathfrak{S}(G/K) \subseteq \mathfrak{N}(UK/K)$.*

(vi) *Für jeden U enthaltenden Subnormalteiler V von G und für jeden Normalteiler N von V gilt: $\mathfrak{S}(V/N) \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{S}(UN/N))$.*

BEWEIS. Die Eigenschaften (ii) und (iv) werden von Subnormalteilern trivial erfüllt. Ist U ein Subnormalteiler von G, so besagt ein Satz von WIELANDT ([5], Satz 20), daß U auch die Bedingung (iii) erfüllt. — In [7] zeigt WIELANDT, daß jeder minimale Normalteiler von G — also auch $\mathfrak{S}(G)$ — einen jeden Subnormalteiler von G normalisiert. Damit ist klar, daß der Subnormalteiler U von G auch die Bedingungen (v) und (vi) erfüllt.

Daß (i) aus (ii) folgt, ist in Satz 6 enthalten.

(i) *folgt aus* (iii). Die Funktion $\mathscr{M}$, die G alle Untergruppen mit der Eigenschaft (iii) zuordnet, ist subnormal; der einzige Punkt, der fraglich ist, ist die Bedingung A IV. Sei U eine solche minimale $\mathscr{M}$-Untergruppe von G; entweder ist U abelsch und von Primzahlordnung und erfüllt so A IV trivial, oder aber U ist nichtabelsch und einfach und daher nach (iii) mit jedem seiner Konjugierten vertauschbar. Aber dann garantiert der Hilfssatz 12, daß $U \cap U^g$ ein π-Subnormalteiler von U ist. Die Bedingung A IV ist also auch erfüllt, und $\mathscr{M}$ ist eine subnormale Funktion. Satz 7 besagt dann, daß U subnormal ist.

Um zu sehen, daß *aus* (iv) *ebenfalls* (i) *folgt*, überlege man sich, daß mit U auch jeder Subnormalteiler von U die Eigenschaft (iv) besitzt. Es ist klar, daß es genügt, dies für einen Normalteiler L von U zu zeigen. Sei $U \cap U^g = D$; dann ist $L \cap D$ ein Normalteiler von D, ebenso $L^g \cap D$. Daher ist $L \cap L^g$ als Normalteiler des π-Subnormalteilers D nach Hilfssatz 11 ein π-Subnormalteiler von G, also auch von L.

Sei nun G eine Gruppe minimaler Ordnung derart, daß es eine Untergruppe U von G gibt, die zwar (iv) erfüllt, aber nicht subnormal in G ist. Sei U eine minimale solche Gruppe. Dann ist jeder echte Subnormalteiler von U ein Subnormalteiler von G. Sei $C_p(U)$ die von allen p-Elementen von U erzeugte Untergruppe von U. Es ist klar, daß die π-Gruppe U mit dem Produkt seiner $C_p(U)$ zusammenfällt, wenn p alle Primzahlen aus π durchläuft. Ist für jedes $p \in \pi$ die Gruppe $C_p(U) \neq U$, so ist U als das Erzeugnis seiner echten Subnormalteiler $C_p(U)$ subnormal in G, denn diese sind in G subnormal. Also muß es eine Primzahl $p \in \pi$ geben derart, daß $C_p(U) = U$. Sei nun P eine p-Sylow-Gruppe von U, $g \in \mathfrak{N}(P)$. Der Durchschnitt $U \cap U^g$ ist nach (iv) ein π-Subnormalteiler von U und enthält eine p-Sylow-Gruppe von U, also alle. Da U aber von seinen p-Elementen erzeugt wird, so ist $U \cap U^g = U$ und $g \in \mathfrak{N}(U)$. — Sei Z die von den Zentren aller p-Sylow-Gruppen von G erzeugte Untergruppe von G. Es gilt $Z \leqq \mathfrak{N}(U)$. Nun gilt (iv) für ZU/Z in der Faktorgruppe G/Z von G, und wegen der Minimalität von G ist ZU/Z in G/Z subnormal. Also ist ZU in G subnormal. Aber U ist normal in ZU, also auch subnormal in G — entgegen unserer Annahme über U. Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches G geben kann, daß daher (i) aus (iv) folgt.

Aus (v) *folgt* (i). Dies wird durch Induktion nach der Länge der Kompositionskette von G bewiesen. Sei G eine Gruppe derart, daß für alle Gruppen kürzerer Kompositionslänge die Subnormalität bereits als Folge von (v) nachgewiesen ist. — Sei K ein minimaler Normalteiler ($\neq 1$) von G. Nach Voraus-

setzung ist die Bedingung (v) aber in G/K für die Untergruppe UK/K erfüllt. Da die Kompositionslänge von G/K kleiner ist als die von G, so ist UK/K subnormal in G/K; also ist UK subnormal in G. Als minimaler Normalteiler ist K aber direkter Faktor von $\mathfrak{S}(G)$. Die Bedingung (v) besagt, daß $K \leqq \mathfrak{N}(U)$. Daher ist U Normalteiler des Subnormalteilers UK von G, und so selbst subnormal in G.

Aus (vi) *folgt* (i). In Gruppen kürzerer Kompositionslänge als G sei diese Implikation bereits nachgewiesen. — Sei K ein minimaler Normalteiler von G. In der Gruppe G/K gilt (vi) für die Untergruppe UK/K. Da die Kompositionslänge von G/K kürzer ist als die Kompositionslänge von G, so gilt die Folgerung in G/K nach Induktionsvoraussetzung, und UK/K ist subnormal in G/K; also ist UK subnormal in G.

Gibt es nun einen minimalen Normalteiler K von G derart, daß $UK \neq G$, so ist U subnormal in UK und also auch in G, denn die Kompositionslänge des Subnormalteilers UK von G ist in diesem Fall kleiner als die Kompositionslänge von G, und (vi) gilt auch in UK für U.

Andernfalls ist aber $UK = G$ für jeden minimalen Normalteiler K von G. Die Bedingung (vi) besagt (für $V = G$), daß K den Sockel $\mathfrak{S}(U)$ normalisiert. Aber dann ist $\mathfrak{S}(U)$ als Normalteiler von U auch in $KU = G$ normal. — Wählt man nun den minimalen Normalteiler $K \leqq \mathfrak{S}(U) \leqq U$, dann sieht man, daß $U = UK = G$. Also ist U trivialerweise subnormal.

Damit ist Satz 8 vollständig bewiesen.

BEMERKUNG. Der Beweis der Gleichwertigkeit von (i), (v) und (vi) benutzte die Endlichkeit der Gruppe G nicht völlig, sondern kam mit der Endlichkeit der Kompositionslänge von G aus. Da die benutzten Sätze von WIELANDT auch für Gruppen mit endlicher Kompositionslänge gelten ([5], [7]), so ist die Gleichwertigkeit dieser Bedingungen auch in dieser weiteren Klasse von Gruppen bewiesen. — Nebenbei sei bemerkt, daß sich aus der Gleichwertigkeit von (i) und (v) auch ein neuer Beweis für den bekannten Satz (WIELANDT [5], Satz 7) ergibt, daß in Gruppen endlicher Kompositionslänge die Vereinigung zweier Subnormalteiler wieder subnormal ist.

BEMERKUNG. Aus Satz 6 folgt die Aussage:

Werden die streng π-subnormalen Untergruppen A und B von G beide von ihren π-Elementen erzeugt, so ist $\{A, B\}$ in G streng π-subnormal. — Ohne die Voraussetzung über die π-Erzeugbarkeit von A und B gilt diese Aussage im allgemeinen jedoch nicht, dies zeigt ein

BEISPIEL. Sei C die nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6. Sei G eine einfache Gruppe, die eine zu C isomorphe Untergruppe enthält, die wir mit C identifizieren. Seien A und B zwei verschiedene 2-Sylow-Gruppen von C. Trivialerweise sind A und B streng 3-subnormal in G. Aber $\{A, B\} = C$ ist nicht 3-subnormal in G; denn sonst wäre die (in C normale) 3-Sylow-Gruppe von C ein 3-Subnormalteiler und damit subnormal, was der Einfachheit von G widerspräche. — Durch leichte Abänderung des Beispiels sieht man, daß bei Verzicht auf die „Strenge" an der im Beispiel gegebenen Situation auch

durch die Forderung nichts geändert wird, daß die Ordnungen der π-Subnormalteiler A und B durch alle Primzahlen aus π teilbar sind.

Im Zusammenhang mit der π-Subnormalität einer Untergruppe U von G kann man sich fragen, unter welchen Bedingungen aus der π-Subnormalität von $U \neq G$ die Nichteinfachheit von G folgt. — Eine andere Frage ist, unter welchen Bedingungen aus der π-Subnormalität von U auf die Existenz eines Subnormalteilers $V \neq 1$ von G mit $V \subseteq U$ geschlossen werden kann. Ein (sehr spezieller) Beitrag hierzu ist

SATZ 9. *Sei pq ein Teiler der Ordnung der Untergruppe U der endlichen, auflösbaren Gruppe G. Enthält U keine Elemente der Ordnung pq, so folgt aus der Bedingung, daß U ein pq-Subnormalteiler von G ist, daß U einen Normalteiler V enthält, der in G subnormal ist, mit $(pq, o(V)) \neq 1$.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz sei falsch; dann gibt es unter den endlichen, auflösbaren Gruppen, die Untergruppen enthalten, welche zwar den Voraussetzungen des Satzes genügen, nicht aber der Folgerung, eine Gruppe G von kleinster Ordnung. Sei U minimal unter den Untergruppen von G, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, nicht aber die Folgerung.

a) *U enthält keinen pq-Normalteiler $\neq 1$*; denn ein solcher wäre nach Hilfssatz 11 auch pq-subnormal in G und damit nach der Bemerkung zu Satz 7 sogar subnormal in G. Dies aber widerspräche unserer Annahme über U.

b) *Für jeden minimalen Normalteiler N ($\neq 1$) von G gilt der Satz für UN/N in G/N*: Da $o(G/N) \leqq o(G)$, so folgt aus der Minimalität von G die Gültigkeit des Satzes für UN/N, falls UN/N in G/N die Voraussetzungen erfüllt. Nach Hilfssatz 9 ist UN/N ein pq-Subnormalteiler von G/N; da es bereits in U keine Elemente der Ordnung pq gibt, so kann es in UN/N auch keine geben. Nach a) gibt es in U keinen pq-Normalteiler $\neq 1$, d.h. aber: $(pq, o(N \cap U)) = 1$; dann teilt aber pq auch die Ordnung von UN/N. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 9 für UN/N in G/N nachgewiesen, und in G/N gibt es also einen Subnormalteiler V/N, der normal ist in UN/N und $(pq, o(V/N)) \neq 1$ erfüllt. O.B.d.A. nehmen wir an, p teilt $o(V/N)$.

c) *Der minimale Normalteiler N von G ist eine p-Gruppe.* — Nach Hilfssatz 12 ist $V \cap U$ ein pq-Subnormalteiler von V. Nach dem Dedekindschen Modulsatz hat V die Form $V = N(U \cap V)$. — Ist die elementar-abelsche Gruppe N keine p-Gruppe, so ist jede p-Sylow-Gruppe von V bereits in $U \cap V$ enthalten, also auch der von diesen aufgespannte Normalteiler R von V. Nun ist R eine charakteristische Untergruppe von V und daher normal in UN; also ist R auch normal in U. Aber R täte das Verlangte, und dies widerspräche der Wahl von U. — Also ist N eine p-Gruppe.

d) *q teilt die Ordnung von $U \cap V$ nicht;* denn da N eine p-Gruppe ist, so ist jede q-Sylow-Gruppe von V bereits in $U \cap V$ enthalten, der von allen q-Sylow-Gruppen von V erzeugte Normalteiler von U täte das Verlangte im Widerspruch zu unserer Annahme über U.

Sei S der von allen q-Sylow-Gruppen von UN erzeugte Normalteiler von UN. Da U aber q-subnormal ist, so enthält U bereits S als Normalteiler.

Es gilt $D = S \cap V$ ist normal in UN, also auch in U. Aber D ist als Normalteiler von UN auch in V normal und daher Subnormalteiler von G. Wäre nun $(pq, o(D)) \neq 1$, so wäre D ein Normalteiler von U, wie er in der Aussage des Satzes gefordert, in unserer Annahme jedoch ausgeschlossen war Daher gilt

e) $(pq, o(D)) = 1$.

U/D enthält aber den Normalteiler $S/D \times (U \cap V)/D$. Da S/D Elemente der Ordnung q und $(U \cap V)/D$ Elemente der Ordnung p enthält, so gibt es in dem direkten Produkt der beiden Normalteiler von U/D Elemente der Ordnung pq. — Das ist aber unmöglich; denn wir hatten vorausgesetzt, daß es sogar in U keine Elemente der Ordnung pq gibt. Dieser Widerspruch zeigt, daß es ein G mit den angenommenen Eigenschaften nicht geben kann, daß also der Satz gilt.

BEMERKUNG. Es scheint eine schwer zu entscheidende Frage zu sein, ob man in Satz 9 die Bedingung fortlassen kann, daß U keine Elemente der Ordnung pq enthalte. — Ebenso liegt es nahe zu fragen, ob die Aussage von Satz 9 richtig bleibt, wenn man die Auflösbarkeit höchstens noch von U (aber nicht mehr von G) fordert.

Literatur

[1] CARTER, R. W.: On a class of finite soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) **9**, 623–640 (1959).

[2] KEGEL, O. H.: Produkte nilpotenter Gruppen. Archiv d. Mathematik XII, 90–93 (1961).

[3] ORE, O.: Structures an group theory I. Duke Math. J. **3**, 149–174 (1937).

[4] — Contributions to the theory of finite groups. Duke Math. J. **5**, 431–460 (1939).

[5] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).

[6] — Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1–7 (1951).

[7] — Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. **69**, 463–465 (1958).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 3. März 1961)