OTTO H. KEGEL

Aufzählung der Partitionen endlicher Gruppen mit
trivialer Fittingscher Untergruppe

Aufzählung der Partitionen endlicher Gruppen mit trivialer Fittingscher Untergruppe

Von

Otto H. KEGEL

Läßt die endliche Gruppe G mit trivialer Fittingscher Untergruppe eine nicht-triviale Partition zu, so ist G nach SUZUKI [8] entweder der $PGL(2, p^n)$, der $PSL(2, p^n)$ (in beiden Fällen $p^n \geq 4$) oder aber einer der neuen einfachen Gruppen $G(q)$ von SUZUKI [7] isomorph.

a. $G \cong G(q)$, mit $q = 2r^2$, $r = 2^n$. Dann ist $o(G) = (q^2 + 1)q^2(q - 1)$. SUZUKI beschreibt in [7] eine normale, Hallsche Partition π von G , deren Komponenten die Ordnungen $q + 2r + 1$, $q - 2r + 1$, $q - 1$ sowie q^2 haben. Komponenten von π mit einer der ersten drei Ordnungen sind zyklisch. Daher müßte jede echte Verfeinerung von π eine nicht-triviale Partition in mindestens einer 2-Sylowgruppe Q von G induzieren. Nach der Konstruktion von G (SUZUKI [7], p. 869) besitzt Q zwei Elemente der Ordnung 4, die nicht miteinander vertauschbar sind. Nach BAER ([2], Hilfssatz A. 15) kann Q dann nur die triviale Partition zulassen. Also ist die Partition π die feinste Partition von G . — Da nach SUZUKI [7] die Komponenten dieser Partition maximale nilpotente Untergruppen von G sind, und da Komponenten einer normalen, nicht-trivialen Partition einer einfachen Gruppe nilpotent sind (KEGEL [4], Satz 2), so gibt es keine andere nicht-triviale, normale Partition von G .

Sei nun eine nicht-normale Vergrößerung der Partition π von G gegeben. Sei S eine Komponente dieser neuen Partition, die eine Komponente von π echt enthält, so ist $\pi \cap S$ eine nicht-triviale, normale, Hallsche Partition von S . Wäre S nun nicht auflösbar, so wäre S entweder eine nicht auflösbare Frobeniusgruppe oder aber S hätte einen der in der Einleitung angegebenen Typen. Da $o(G)$ nicht durch 3 teilbar ist, nicht-auflösbare Frobeniusgruppen nach SUZUKI [6] aber einen Kompositionsfaktor vom Typ $PSL(2, p)$ haben, und die Ordnung der Gruppen vom Typ $PSL(2, p)$ durch 3 teilbar ist, so hat S die Form $S = G(q')$ mit $q' < q$. Da die 2-Sylowuntergruppe einer Gruppe vom Typ $G(q)$ diese unter den anderen dieser Familie kennzeichnet, so kann S keine 2-Sylowgruppe von $G(q)$ ganz enthalten. Also enthält S eine zyklische Komponente von π . Die Ordnung einer Komponente kleinster Ordnung von π ist $q - 2r + 1$. Unter den zyklischen Komponenten von $\pi \cap S$ hat die größter Ordnung die Ordnung $q' + 2r' + 1$. Also muß gelten

$$q' + 2r' \geq q - 2r.$$

Es ist aber $q = 2r^2$ und $q' = 2r'^2$. Also wäre $r/r' \cdot (r - 1) \leq (r' + 1)$. Aber $r \geq 2r'$ und damit hat man einen Widerspruch zur Annahme, S sei nicht auflösbar.

Ist S auflösbar, so ist nach BAER ([1], Satz 6.11) $\pi \cap S$ eine minimale Frobeniuspartition von S . Jede Komponente von $\pi \cap S$ ist eine Komponente von π . Sei K der Frobeniuskern von S , dann ist K eine Komponente von π , und für die Hallische Untergruppe S von G gilt $S \subseteq \mathfrak{N}K$. Wäre K eine zyklische Komponente von π , so wäre nach SUZUKI [7] $[\mathfrak{N}K : K] = 2$ oder 4 , und K wäre die größte Hallische Untergruppe von G , die in $\mathfrak{N}K$ enthalten ist. Da aber S eine Hallische Untergruppe von G ist, so ist K eine 2-Sylowgruppe von G . Ein Frobeniuskomplement von K in S ist aber eine Komponente von π ; wegen $S \subseteq \mathfrak{N}K$ hat so ein Frobeniuskomplement die Ordnung $q - 1$, so daß sogar gilt $SK = \mathfrak{N}K$. — Läge nun noch eine 2-Sylowgruppe Q von G echt in einer anderen Komponente T dieser Vergrößerung von π , so wäre $o(S) = o(T) = q^2(q - 1)$. Aber aus $S \cap T = 1$ folgt: $o(G) \geq o(S)o(T)$. Dies ist aber ein Widerspruch gegen $o(G) = q^2(q^2 + 1)(q - 1)$. Also entsteht diese Partition aus π , indem man den Normalisator einer 2-Sylowgruppe von G zur Komponente wählt und alle in ihm enthaltenen Komponenten von π fortläßt, alle anderen beibehält. — Somit gilt

Satz A. *Die einfachen Gruppen $G(q)$ von SUZUKI besitzen genau eine nicht-triviale, normale Partition. — Je zwei nicht-triviale, nicht-normale Partitionen von $G(q)$ sind zueinander konjugiert.*

b. $G \cong PGL(2, p^n)$, mit $p^n \geq 4$. Dann ist $o(G) = (p^n + 1)p^n(p^n - 1)$. Nach DICKSON (Chapter XII) gibt es in G eine normale Partition π mit Komponenten der Ordnungen $p^n + 1$, $p^n - 1$ und p^n . Die Komponenten der Ordnungen $p^n + 1$ und $p^n - 1$ von π sind zyklisch. Es gibt Komponenten der Ordnung $p^n - 1$ von π , die eine elementar-abelsche p -Sylowgruppe (und Komponente der Ordnung p^n) P normalisieren. Sei g ein Element der Ordnung p aus P , dann ist $P = \langle g \rangle$; daraus ergibt sich, daß P nicht nur eine maximale nilpotente Untergruppe von G ist, sondern zugleich die größte nilpotente Untergruppe von G , die ein Element $\neq 1$ von P enthält. Da die Untergruppen der Ordnungen $p^n + 1$ und $p^n - 1$ maximale zyklische Untergruppen von G sind, so ist die Partition π von G nicht nur eine größte, normale, nicht-triviale Partition von G , sondern auch die einzige. — Wie unter a. sieht man, daß jede nicht-normale Vergrößerung von π genau eine Komponente besitzt, die mit dem Normalisator (der Ordnung $p^n(p^n - 1)$) einer p -Sylowgruppe P von G übereinstimmt. Je zwei dieser Vergrößerungen sind konjugiert. — Daher gilt

Satz B. *Die Gruppen $PGL(2, p^n)$, mit $p^n \geq 4$, besitzen genau eine größte, normale, nicht-triviale Partition π . — Je zwei nicht-normale Vergrößerungen von π sind konjugiert.*

Jede Partition von G , die von den beiden in Satz B angegebenen abweicht, induziert in mindestens einer p -Sylowgruppe P von G eine nicht-triviale Partition (dafür muß natürlich $n > 1$ sein). Die feinste Partition von G besteht aus der Menge der maximal zyklischen Untergruppen von G .

c. $G \cong PSL(2, p^n)$, mit $p^n \geq 4$. Ist $p = 2$, so ist $PSL(2, 2^n) \cong PGL(2, 2^n)$. Ist $p \neq 2$, so ist $PSL(2, p^n)$ ein einfacher Normalteiler vom Index 2 in $PGL(2, p^n)$. Die normale Partition von G , die in diesem Falle ($p \neq 2$) von der größten normalen Partition von $PGL(2, p^n)$ in $G = PSL(2, p^n)$ induziert wird, nennen wir π ; ihre

Komponenten haben die Ordnungen $(p^n + 1)/2$, $(p^n - 1)/2$, p^n . Es ist klar, daß Komponenten der ersten beiden Ordnungen zyklisch sind. Sie haben den Index 2 in ihren Normalisatoren. Ist nun eine größte, normale, nicht-triviale Partition von G gegeben, so ist jede Komponente dieser Partition nach KEGEL ([4], Satz 2) nilpotent. Daher ist jede p -Sylowgruppe von G eine Komponente dieser größten normalen, nicht-trivialen Partition; denn die p -Sylowgruppe Q von G ist nach DICKSON ([3], chapter XII) der Zentralisator eines jeden Elements $\neq 1$ von Q . Sei nun L eine der zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^n + 1$ oder $p^n - 1$, und sei L echt in einer (nilpotenten) Komponente R einer größten normalen, nicht-trivialen Partition von G enthalten. Dann ist auch $\mathfrak{N}L \subseteq R$, da ja $[\mathfrak{N}L : L] = 2$. $\mathfrak{N}L$ ist aber eine Diedergruppe, also nur nilpotent, wenn $o(L)$ eine Potenz von 2 ist. In diesem Fall ist aber $\mathfrak{N}L$ eine 2-Sylowgruppe von G . Da in R nur zu L unter G konjugierte Komponenten von π enthalten sein können, so ist R eine 2-Untergruppe von G , also $R = \mathfrak{N}L$. Da in R außer L mindestens noch eine Komponente von π enthalten sein muß, und da diese zu L isomorph ist, so findet man $o(L) = [R : L] = 2$. Das ist aber nur möglich, wenn $o(L) = (p^n - 1)/2 = 2$, also $p^n = 5$ ist. Daher gilt

Satz C. *Die Gruppen $PSL(2, p^n)$ mit $p^n > 5$, sowie $PSL(2, 4)$ besitzen genau eine größte, normale, nicht-triviale Partition π , die mit der von der größten, normalen, nicht-trivialen Partition von $PGL(2, p^n)$ in $PSL(2, p^n)$ induzierten Partition übereinstimmt. Je zwei nicht-normale Vergrößerungen von π sind konjugiert.*

Die zweite Aussage ergibt sich genau wie unter a. und b.

Der Grund für die Aussonderung von $PSL(2, 5)$ ist darin zu suchen, daß diese Gruppe sich auch als $PSL(2, 4)$ darstellen läßt, die Partition π_4 aber die größte und die Partition π_5 die feinste normale Partition der einfachen Gruppe der Ordnung 60 ($\cong PGL(2, 4) \cong PSL(2, 4) \cong PSL(2, 5)$) bilden.

Jede Partition von $PSL(2, p^n)$, die von den beiden in Satz C angegebenen abweicht, induziert in mindestens einer p -Sylowgruppe P von G eine nicht-triviale Partition (dafür muß natürlich $n > 1$ sein). Man kann sich leicht davon überzeugen, daß — mit Ausnahme von $PSL(2, 5)$ — jede Partition von $PSL(2, p^n)$ von einer Partition von $PGL(2, p^n)$ induziert wird.

d. Da im Falle ungeraden p 's die Normalisatoren der Komponenten der Ordnungen $(p^n + 1)/2$ und $(p^n - 1)/2$ von $PSL(2, p^n)$ Diedergruppen sind, aber eine der beiden Komponenten gerade Ordnung hat, so ergibt sich, daß unter diesen Gruppen außer $PSL(2, 5)$ keine eine nicht-triviale Hallsche Partition zuläßt. Die einzigen einfachen Gruppen mit nicht-trivialer, normaler, Hallscher Partition sind also die $PSL(2, 2^n)$ mit $n \geq 2$ und die einfachen Gruppen von SUZUKI.

e. Sei X eine nicht-primäre Komponente der nicht-trivialen, normalen Partition π der endlichen Gruppe G ; sei q ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$, dann ist in den oben diskutierten Gruppenklassen b. und c. stets $q = 2$; in den einfachen Gruppen $G(2^n)$ von SUZUKI kann diese Situation nicht auftreten, da die einzige nicht-triviale, normale Partition von $G(2^n)$ Hallsch ist. Die nicht-triviale Partition der symmetrischen Gruppe des Grades 4 besitzt keine nicht-primäre Komponente; also ist für $q \neq 2$ die Partition von G nicht-einfach. (Damit ist gezeigt, daß es

Gruppen der von BAER ([2], Abschnitt E) diskutierten Art nicht geben kann.) Ein π -zulässiger Normalteiler $\neq G$ von G ist nilpotent, und so folgt aus KEGEL ([5], Korollar), daß X die Fittingsche Untergruppe $\mathfrak{F}G$ ist und $[G:X] = q$ gilt. Daher kann man in KEGEL [2] das Korollar verschärfen zu

Satz E. *Ist die Komponente X der nicht-trivialen, normalen Partition π der endlichen Gruppe G nicht-primär und ist $([G:X], o(X)) \neq 1$, so ist $([G:X], o(X))$ eine Primzahl q . Entweder ist π einfach, dann ist $q = 2$ und G einer der Gruppen $PGL(2, p^n)$ oder $PSL(2, p^n)$ mit $p \neq 2$ isomorph (im letzteren Falle darf p^n keine Fermat- oder Mersenne-Primzahl oder 9 sein), oder $X = \mathfrak{F}G$, und $[G:X] = q$.*

Beweis. Ist π nicht-einfach, so ist die Fittingsche Untergruppe $\mathfrak{F}G \neq 1$. In diesem Fall beweist das Korollar aus KEGEL [5] den Satz.

Ist π einfach, so kann G nur in den unter b. und c. diskutierten Gruppen liegen; denn die einzige nicht-triviale Partition der symmetrischen Gruppe des Grades 4 hat nur primäre Komponenten, und die einzige nicht-triviale Partition der einfachen Gruppen von SUZUKI hat nur Hallische Untergruppen von G als Komponenten. Es gilt $p \neq 2$; denn sonst sind die zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^n \pm 1$ Hallische Untergruppen von G . Sei $G \cong PSL(2, p^n)$. Ist nun eine der beiden Zahlen $(p^n + 1)/2$ und $(p^n - 1)/2$ eine Potenz von 2 (dann ist die andere nicht durch 2 teilbar), so erfüllt auch keine der Komponenten der Ordnung $(p + 1)/2$ die Voraussetzungen unseres Satzes (in diesem Falle ist aber nach THOMPSON [9], Lemma 3 die Primzahlpotenz p^n entweder eine Mersenne- oder eine Fermat-Primzahl, oder $p^n = 9$; dann ist aber G einer Gruppe $PSL(2, p)$ mit p Fermat- oder Mersenne-Primzahl oder der Gruppe $PSL(2, 9)$ isomorph.) — Aus DICKSON [3] ergibt sich sofort, daß $([G:X], o(X)) = 1$ oder 2 ist für jede zyklische Komponente der Ordnung $(p^n + 1)/2$ von $PSL(2, p^n)$. Damit ist der Satz E bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] R. BAER, Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
- [2] R. BAER, Einfache Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **77**, 1—37 (1961).
- [3] L. E. DICKSON, Linear groups. Leipzig 1901 (Chapter XII).
- [4] O. H. KEGEL, Die Nilpotenz der H_p -Gruppen. Math. Z. **75**, 373—376 (1961).
- [5] O. H. KEGEL, Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen. Arch. Math. **12**, 170—175 (1961).
- [6] M. SUZUKI, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes. Amer. J. Math. **77**, 657—691 (1955).
- [7] M. SUZUKI, A new type of simple groups of finite order. Proc. Nat. Acad. Sci., USA **46**, 868 bis 870 (1960).
- [8] M. SUZUKI, On a finite group with a partition. Arch. Math. **12**, 241—254 (1961).
- [9] J. G. THOMPSON, A special class of non-solvable groups. Math. Z. **72**, 458—462 (1960).

Eingegangen am 30. 10. 1961

Anschrift des Autors:

Otto H. Kegel
Mathematisches Seminar
der Universität
Frankfurt (Main)