OTTO H. KEGEL

Noethersche 2-Gruppen sind endlich

Noethersche 2-Gruppen sind endlich

Von

Otto H. Kegel, Frankfurt a. Main

(Eingegangen am 29. Juli 1966)

In einer aus seinem Nachlaß publizierten Note [4] hat *O. Ju. Schmidt* gezeigt, daß 2-Gruppen lokal endlich sind, wenn sie der Minimalbedingung für Untergruppen genügen. Der Inhalt dieser Note ist die Bemerkung, daß die Maximalbedingung für die (endlichen, abelschen) Untergruppen einer 2-Gruppe G bereits deren Endlichkeit nach sich zieht. — Der folgende Beweis ist kürzer als der von *Schmidt* [4], aber der Kern des Arguments ist der gleiche: Eine von zwei Involutionen erzeugte Gruppe ist eine Diedergruppe.

Zunächst beweisen wir (etwas schärfer als im Titel angekündigt) den

Satz A: Erfüllt die 2-Gruppe G die Maximalbedingung für endliche Untergruppen, so ist G endlich.

Beweis: Angenommen, der Satz sei falsch; dann sei G eine unendliche 2-Gruppe, die der Maximalbedingung für endliche Untergruppen genügt. Dann liegt jedes Element von G in einer maximalen endlichen Untergruppe von G . Sei U eine solche maximal endliche Untergruppe von G und sei $V \neq U$ eine maximal endliche Untergruppe von G derart, daß der Durchschnitt $D = U \cap V$ größtmögliche Ordnung hat. Nun betrachte man den Normalisator $N_G D$ in G : Es gilt $U \cap N_G D \supsetneq D \subseteq V \cap N_G D$, denn U und V sind ja endliche nilpotente Gruppen. Weiter ist $U \cap N_G D$ eine maximal endliche Untergruppe von $N_G D$; denn sonst gäbe es eine nicht in U enthaltene Untergruppe von $N_G D$, deren Durchschnitt mit U die Untergruppe D echt enthält, was der Wahl von D widerspricht. — Ist nun $M \neq U$ eine maximal endliche Untergruppe von $N_G D$, so gilt $M \cap U = D$. Dies folgt ebenso aus der Wahl von D .

Wegen $U \cap N_G D \supsetneq D$ gibt es ein Element $i \in U \cap N_G D$ mit $i^2 \in D$ aber $i \notin D$. Sei $j \in N_G D$ mit $j \notin U \cap N_G D$ aber $j^2 \in D$; dann

ist die Gruppe $\langle i, j \rangle D/D$ eine Diedergruppe. Da G eine Torsionsgruppe ist, ist diese Gruppe offenbar endlich. Dann ist aber auch die Untergruppe $\langle i, j \rangle D$ von G endlich, sie liegt nicht in U und erfüllt $U \cap \langle i, j \rangle D \neq D$. Dies widerspricht aber der Auswahl von D . — Aus diesem Widerspruch folgt, daß es keine solche unendliche Gruppe geben kann; und damit ist Satz A bewiesen.

Eine Verschärfung von Satz A bildet

*Korollar B: Erfüllt die 2-Gruppe G die Maximalbedingung für endliche abelsche Untergruppen, so ist G endlich.**

Beweis: Die 2-Gruppe G erfülle die Maximalbedingung für endliche abelsche Untergruppen; wir wollen zeigen, daß in G sogar die Maximalbedingung für endliche Untergruppen erfüllt ist. — Wäre dies nicht so, dann gäbe es eine unendliche aufsteigende Folge endlicher Untergruppen $U_i \subsetneq U_{i+1}$ von G . Sei $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Die unendliche Untergruppe U von G ist lokal endlich und damit lokal nilpotent. Nach Černikov ([2], Sätze 3 und 4) hat U dann eine unendliche abelsche Untergruppe A . Nach Voraussetzung erfüllt die abelsche Torsionsgruppe A die Maximalbedingung für (endliche) Untergruppen und ist daher endlich erzeugt und also endlich (vgl. [3], Theorem 10, 3). Dieser Widerspruch zeigt, daß G sogar der Maximalbedingung für endliche Untergruppen genügt. Nach Satz A ist G also endlich.

Die Tatsache, daß das Erzeugnis zweier Involutionen eine Diedergruppe ist, ist äußerst nützlich bei der Untersuchung von Gruppen, die Involutionen enthalten, insbesondere von endlichen Gruppen gerader Ordnung (vgl. etwa [1]). Als Beispiel eines solchen Satzes geben wir den wahrscheinlich wohlbekannten

Satz C: Die endliche Gruppe G ist genau dann 2-abgeschlossen, wenn jede überauflösbare Untergruppe von G 2-abgeschlossen ist.

Dabei heißt eine endliche Gruppe 2-abgeschlossen, wenn ihre 2-Sylowgruppe Normalteiler ist, und überauflösbar, wenn es eine Hauptreihe mit zyklischen Hauptfaktoren gibt. — Der naheliegende Beweis von Satz C sei dem Leser überlassen.

* Nachdem diese Note bereits zur Publikation angenommen war, sah Verf. die Note von D. Held: On abelian subgroups of an infinite 2-group, Acta Sci. Math. Szeged 27 (1966) 97/98, in welcher im wesentlichen das Korollar B auf etwas umständlichere Weise bewiesen wird.

Literatur

[1] *R. Brauer und K. A. Fowler*: On groups of even order. *Annals of Math.* (2) **62** (1955), 565—583.

[2] *S. N. Černikov*: Über lokal auflösbare Gruppen, die der Minimalbedingung für Untergruppen genügen (russisch). *Mat. Sbornik* **28** (1951), 119—129.

[3] *L. Fuchs*: Abelian groups, Budapest 1960.

[4] *O. Ju. Schmidt*: Die lokale Endlichkeit einer Klasse unendlicher periodischer Gruppen (russisch). *Ausgewählte Arbeiten*, Moskau 1959, 298—300.

Anschrift des Verf.:

Mathematisches Seminar der

Universität Frankfurt a. M.

6 Frankfurt am Main

Robert-Mayer-Straße 6—8