OTTO H. KEGEL

Die Nilpotenz der Hp-Gruppen

Die Nilpotenz der H_p -Gruppen

Von

OTTO H. KEGEL

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [3] beschäftigen sich HUGHES und THOMPSON mit endlichen Gruppen, die einen Automorphismus s der Primzahlordnung p besitzen, der für alle $g \in G$ die Gleichung

$$(I) \quad g^{1+s+s^2+\dots+s^{p-1}} = 1 \quad \text{erfüllt.}$$

Für diese Gruppen bewiesen sie ([3], Theorem 2 und 3) die folgende Strukturaussage:

(H – T) Besitzt eine endliche Gruppe G einen Automorphismus s von Primzahlordnung p , der auf G die Gleichung (I) erfüllt, und ist G keine p -Gruppe, so wird G bereits von all den Elementen erzeugt, deren Ordnungen ungleich p sind; G besitzt eine nilpotente, charakteristische Untergruppe K derart, daß G/K eine p -Gruppe ist und $(o(K), p) = 1$. — G ist also auflösbar.

(Gruppen, die den Voraussetzungen der Aussage (H – T) genügen, werden in [3] mit H_p -Gruppen bezeichnet.)

In dieser Note soll gezeigt werden, daß man diesen Satz zugleich verschärfen und (trivial) verallgemeinern kann zu

SATZ 1. *Besitzt die endliche Gruppe G einen Automorphismus s von Primzahlordnung p , der für alle $g \in G$ die Gleichung (I) erfüllt, so ist G nilpotent.*

BEWEIS. Angenommen, der Satz sei falsch; dann gibt es unter den endlichen Gruppen, die Gegenbeispiele bilden, eine Gruppe G von minimaler Ordnung. — Da G nicht nilpotent ist, also auch keine p -Gruppe, so gelten die Ergebnisse aus [3] für G ; insbesondere gilt für die Untergruppe $G\{s\} = H$ des Holomorphs von G die Gleichung $[H:G] = p$, und jedes Element $x \in H$, $x \notin G$ hat die Ordnung p . G besitzt einen nilpotenten Normalteiler K , derart daß $(o(K), p) = 1$ und G/K eine p -Gruppe ist. — Sei P_1 eine p -Sylow-Gruppe von H , die s enthält.

a) G besitzt eine s -zulässige p -Sylow-Gruppe P und ein s -invariantes Element der Ordnung p ; denn da G Normalteiler von H ist, so ist $G \cap P_1 = P$ eine p -Sylow-Gruppe von G , die als Normalteiler von P_1 natürlich s -zulässig ist. Es ist $P \neq 1$; denn sonst wäre $G = K$ nilpotent. Ist aber der Normalteiler P von P_1 ungleich 1, so enthält er auch Zentrumsэлементы ungleich 1 von P_1 . Ein Zentrumsэлемент der Ordnung p ist aber natürlich s -zulässig.

b) *Jede echte s -zulässige Untergruppe von G und jede Faktorgruppe von G nach einem s -zulässigen Normalteiler $\neq 1$ von G ist nilpotent*; denn auf beiden induziert s Automorphismen, die für alle Elemente die Gleichung (I) erfüllen und entweder die Ordnung p haben, oder die Identität sind. Erfüllt die Identität die Gleichung (I), so heißt das, daß jedes Element die Ordnung p hat, und die Nilpotenz folgt. Ist aber der von s induzierte Automorphismus von der Identität verschieden, so folgt die Aussage b) aus der Minimalität von G .

c) *Das Zentrum $ZG = 1$* ; denn es ist s -zulässig. Eine Gruppe ist aber genau dann nilpotent, wenn ihre Zentrumsfaktorgruppe nilpotent ist. G ist nicht nilpotent, und daher folgt aus b), daß $ZG = 1$ ist.

d) *Die nilpotente, charakteristische Untergruppe K von G ist abelsch*. Andernfalls wäre $ZK \neq K$ und $P \cdot ZK$ wäre eine echte s -zulässige Untergruppe von G und daher nach b) nilpotent. Dann zentralisierte aber P auch ZK , so daß $ZK \subseteq ZG$. Wegen $K \neq 1$ ist $ZK \neq 1$, und c) führt also die Annahme $ZK \neq K$ zu einem Widerspruch.

e) *P ist zyklisch der Ordnung p* . Es gibt nach a) ein s -invariantes Element t der Ordnung p in P . Wäre nun $o(P) \neq p$, so wäre $K\{t\}$ eine echte s -zulässige Untergruppe von G und daher nach b) sogar nilpotent. Dann läge aber t im Zentralisator C_K von K , und es wäre $t \in ZG$, was wegen c) unmöglich ist.

f) *Es gibt ein nicht in K enthaltenes Element w von G mit $o(w) \neq p$* . Die Gruppe G ist nach dem Struktursatz $(H - T)$ von Elementen der Ordnung ungleich p erzeugt. Gäbe es nun kein solches w , so wäre $G = K$, was der Aussage $P \neq 1$ widerspricht.

Nun ist $w^p = k \neq 1$ ein Element aus K , und w hat die Form $w = kg = gk$ mit $o(g) \neq p$. Aus d) und e) ergibt sich dann, daß $k \in ZG$ ist. Dies ist aber wegen c) unmöglich. — Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches G geben kann. Damit ist Satz 1 bewiesen.

BEMERKUNG. Satz 1 verallgemeinert einen Satz von THOMPSON ([4], Theorem 1), der besagt, daß eine Gruppe G nilpotent ist, wenn sie einen Automorphismus s von Primzahlordnung besitzt, der keine Fixelemente $\neq 1$ in G hat; denn eine solche Gruppe ist in der Untergruppe $H = G\{s\}$ des Holomorph von G von allen Elementen von H erzeugt, deren Ordnung ungleich $o(s)$ ist. Aus ([3], Theorem 2) folgt dann, daß s die Gl. (I) für alle Elemente $g \in G$ erfüllt.

Dagegen genügt es nicht, um auf die Nilpotenz von G schließen zu können, daß man von dem Automorphismus s von Primzahlordnung p nur fordert, daß seine Fixelemente in G höchstens p -Potenzordnung haben. Dies zeigt die nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6. Daß man unter dieser schwachen Voraussetzung nicht auf die Auflösbarkeit von G schließen kann, zeigt die einfache Gruppe der Ordnung 60.

Als Anwendung von Satz 1 ergibt sich eine recht scharfe Aussage über die Struktur der Komponenten einer nicht-trivialen Partition einer endlichen Gruppe G . — Dabei verstehen wir unter einer *nicht-trivialen Partition π von G eine Menge (A_i) nicht-trivialer Untergruppen A_i von G derart, daß jedes*

Element $g \neq 1$ aus G in genau einem der A_i liegt. Die Untergruppen A_i nennt man die *Komponenten* der Partition π von G . Eine ausführliche Diskussion nicht-trivialer Partitionen findet man bei BAER [1]. Eine Untergruppe $U \neq 1$ von G nennen wir π -zulässig, wenn jede Komponente von π entweder ganz in U enthalten ist, oder aber kein Element $\neq 1$ mit U gemein hat.

Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 2. *Ist π eine nicht-triviale Partition der endlichen Gruppe G , und ist $U \neq G$ eine π -zulässige Untergruppe von G , dann ist entweder $U = \mathfrak{N}U$, oder aber U ist nilpotent. Dabei bedeutet $\mathfrak{N}U$ den Normalisator von U in G .*

BEWEIS. Nimmt man $U < \mathfrak{N}U$ an, dann betrachte man die von π in $\mathfrak{N}U$ induzierte Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ (ihre Komponenten sind die Durchschnitte von $\mathfrak{N}U$ mit den Komponenten A_i von π , die $A_i \cap \mathfrak{N}U \neq 1$ erfüllen). Ausgehend von der nicht-trivialen Partition $\pi \cap \mathfrak{N}U$ von $\mathfrak{N}U$ definieren wir nun eine (i. a. von $\pi \cap \mathfrak{N}U$ verschiedene) nicht-triviale Partition τ von $\mathfrak{N}U$: Jede Komponente von $\pi \cap \mathfrak{N}U$, die mit U kein Element $\neq 1$ gemein hat, ist Komponente von τ ; U selbst ist Komponente von τ . — Es ist klar, daß hierdurch die Partition τ eindeutig definiert ist.

Aus $U \neq \mathfrak{N}U$ und der Nicht-Trivialität von τ folgt die Existenz von Elementen in $\mathfrak{N}U$, die nicht in U liegen und deren Ordnung eine Primzahl ist ([1], Lemma 2.1). Ist nun g ein solches Element, so folgt aus ([1], Lemma 2.1), daß jedes Element aus $U\{g\}$, das nicht in U liegt, die Ordnung p hat; denn es liegt in einer Komponente $\neq U$ von τ . Dann liegt aber die Gruppe $H_p(U\{g\})$, die von allen Elementen von $U\{g\}$ erzeugt wird, deren Ordnung ungleich p ist, in dem Normalteiler U von $U\{g\}$.

Wäre nun U nicht nilpotent, also insbesondere keine p -Gruppe, dann besagt ([3], Theorem 1), daß $[U\{g\} : H_p(U\{g\})] = p$ ist, also $H_p(U\{g\}) = U$. Nach ([3], Theorem 2) besitzt U aber dann einen Automorphismus der Ordnung p (z. B. den von g induzierten), der die Gl. (I) erfüllt. Dann folgt aber aus Satz 1 die Nilpotenz von U . Das wäre ein Widerspruch. — Also ist U nilpotent, und der Satz ist bewiesen.

BEMERKUNG. Ist $U = \mathfrak{N}U$, so scheint es schwer, etwas über die Struktur von U auszusagen. — Ist aber U eine Komponente von π und ist mit U auch jede zu U konjugierte Untergruppe von G eine Komponente von π (in Analogie zu [1] könnte man sagen, π ist *normal bezüglich der Komponente* U), so kann man aus einem Ergebnis von BURNSIDE ([2], p. 334–335) folgern, daß keine p -Sylow-Gruppe von U für $p \mid o(U)$ eine nicht-zyklische elementarabelsche Untergruppe enthält. — Da man zu einem solchen U eine nicht-triviale Partition von G konstruieren kann (nach FROBENIUS), die außer U und seinen Konjugierten nur noch eine Komponente besitzt (also eine Frobenius-Partition, die sogar Hallsch ist), so findet man weitere Auskunft über die Struktur solcher U in ([1], Kapitel 4). Insbesondere gestattet ein solches U selbst keine nicht-triviale Partition.

Hat man anstelle des Struktursatzes von HUGHES und THOMPSON den Satz 1 zur Verfügung, so vereinfachen sich in [1] einige Beweise, und einige

Sätze lassen sich schärfer fassen. Dies ist insbesondere an den Stellen von [1] der Fall, an denen π -zulässige Normalteiler $\neq G$ von G betrachtet werden. So zeigt Satz 2, daß die Voraussetzungen von ([1], Lemma 3.3) nicht erfüllt werden können, denn ein π -zulässiger Normalteiler $K \neq G$ ist nilpotent.

Literatur

- [1] BAER, R.: Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
- [2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition. Cambridge 1911.
- [3] HUGHES, D. R., and J. G. THOMPSON: The H_p -problem and the structure of H_p -groups. Pac. J. Math. **9**, 1097—1102 (1959).
- [4] THOMPSON, J. G.: Finite groups with fix-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sciences (USA) **45**, 578—581 (1959).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 24. Dezember 1960)