OTTO H. KEGEL

Zur Struktur lokal endlicher Zassenhausgruppen

Zur Struktur lokal endlicher Zassenhausgruppen

Herrn Professor Dr. REINHOLD BAER zum 22. 7. 1967 gewidmet

Von

OTTO H. KEGEL

ZASSENHAUS begann in [11] das Studium der endlichen Permutationsgruppen, in denen kein von der Identität verschiedenes Element mehr als zwei Fixpunkte hat und in denen zugleich die Standuntergruppe eines Punktes normalisatorgleich ist. Im wesentlichen soll im Folgenden unter einer Zassenhausgruppe eine Permutationsgruppe mit diesen beiden Eigenschaften (aber beliebiger Kardinalität!) verstanden werden.

In [11] wurden die dreifach transitiven unter den endlichen Zassenhausgruppen vollständig bestimmt (vgl. auch TITS [10] und HUPPERT [4]) und einige Klassen der endlichen zweifach transitiven Zassenhausgruppen durch zusätzliche Bedingungen charakterisiert. Die Struktur der endlichen zweifach transitiven Zassenhausgruppen wurde durch die Arbeiten von FERT [3], ITO [5] und SUZUKI [8] vollkommen geklärt. Einfach transitive endliche Zassenhausgruppen wurden kürzlich in der Dissertation von KELLER [7] betrachtet.

Es liegt nahe zu versuchen, die Ergebnisse über endliche Zassenhausgruppen auf die Klasse der lokal endlichen Zassenhausgruppen auszudehnen. Dies gelingt uns in dieser Note teilweise: Es ergibt sich eine vollständige Übersicht über die lokal endlichen dreifach transitiven Zassenhausgruppen. Es ergeben sich keine Überraschungen. — Im Argument wird als ein wichtiges Hilfsmittel ein einfacher kombinatorischer Satz von KELLER ([7], Theorem 4.1) benutzt.

Da sich viele der Eigenschaften von Zassenhausgruppen ohne die Einschränkung auf lokal endliche Gruppen zeigen lassen, wird sich ein einleitender Abschnitt mit Zassenhausgruppen allgemein beschäftigen.

1. Definition und einfache Eigenschaften der Zassenhausgruppen.

Definition 1. Die transitive, nicht-reguläre Permutationsgruppe G auf der Menge Ω ist eine *Frobeniusgruppe*, falls kein Element $\neq 1$ von G mehr als einen Fixpunkt auf Ω hat.

Ist G eine Frobeniusgruppe auf Ω und ist für ein Element $\alpha \in \Omega$ die Standuntergruppe $G_\alpha = \langle g \in G; \alpha^g = \alpha \rangle$, dann gilt

$$G_\alpha = \mathcal{N}_G G_\alpha \quad \text{und} \quad G_\alpha \cap G_\alpha^h = 1 \quad \text{für jedes} \quad h \in G \setminus G_\alpha.$$

Daher ist die Frobeniusgruppe G auf Ω permutatisomorph zu der Permutations-

darstellung von G , die durch Transformation auf der Menge der zu G_α konjugierten Untergruppen von G definiert ist.

Ein berühmter Satz von FROBENIUS besagt, daß es in einer endlichen Frobeniusgruppe G einen Normalteiler K , den Frobeniuskern, derart gibt, daß $G = KG_\alpha$ und $K \cap G_\alpha = 1$ gilt und daß alle Elemente von G , die auf Ω keinen Fixpunkt haben, in K liegen. Elemente aus K und aus G_α haben zueinander teilerfremde Ordnungen. Nach THOMPSON [9] ist der Normalteiler K nilpotent. — Diese Aussagen gelten auch noch für lokal endliche Frobeniusgruppen (vgl. [1], § 1 oder [6], Lemma 1.1).

Im allgemeinen hat die Untergruppe G_α der Frobeniusgruppe G aber kein normales Komplement in G . Als Beleg für diese Situation betrachte man für G eine nicht-abelsche freie Gruppe und für G_α irgendeine in der Kommutatorgruppe von G gelegene maximal-zyklische Untergruppe von G .

Definition 2. Die transitive, nicht-reguläre Permutationsgruppe G auf der Menge Ω ist eine *Zassenhausgruppe*, wenn gilt:

- a) Kein Element $\neq 1$ von G hat mehr als zwei Fixpunkte auf Ω ;
- b) $G_\alpha = \mathcal{N}_G G_\alpha$; und
- c) G ist keine Frobeniusgruppe.

Bemerkung. Ersetzt man in dieser Definition die Bedingung b) durch

- b') Für jedes Element $\beta \in \Omega \setminus \alpha$ gilt $G_\alpha \neq G_{\alpha\beta} = G_\alpha \cap G_\beta$,

so erhält man die gleiche Klasse von Gruppen.

Die Forderung c) erzwingt, daß Ω mindestens vier Elemente besitzt und daß es in der Zassenhausgruppe G auf Ω tatsächlich Elemente $\neq 1$ gibt, die auf Ω zwei Fixpunkte haben.

Wegen der Bedingungen a) und b) ist die Permutationsdarstellung der Zassenhausgruppe G auf Ω isomorph zu der Permutationsdarstellung von G , die durch Transformation auf der Menge der zu G_α konjugierten Untergruppen von G definiert ist.

Hilfssatz 3. Ist G eine Zassenhausgruppe auf der Menge Ω und ist α, β ein Paar verschiedener Elemente von Ω mit $G_{\alpha\beta} \neq 1$, so gilt:

- i) G_α operiert als Frobeniusgruppe auf der Bahn $\Omega_1 = \{\beta^{G_\alpha}\}$.
- ii) $G_\alpha \neq G_{\alpha\beta}$.
- iii) Operiert G_α transitiv durch Transformation auf der Menge der Untergruppen $\neq 1$ von G_α der Form $G_{\alpha\gamma}$, so gilt $|\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} : G_{\alpha\beta}| = 2$.

Bemerkung. Die unter iii) gemachte zusätzliche Bedingung ist in lokal endlichen Gruppen stets erfüllt, da dort je zwei Komplemente des Frobeniuskerns einer Frobeniusgruppe (hier G_α) konjugiert sind. Gilt aber tatsächlich $G_{\alpha\beta} = \mathcal{N}_G G_{\alpha\beta}$, so operiert G als Frobeniusgruppe auf der Menge der Paare $\{(\alpha^g, \beta^g); g \in G\}$. — Obwohl dem Verfasser kein Beispiel für diese Situation bekannt ist, scheint es doch, als könne sie auftreten.

Beweis. i) Wegen $G_{\alpha\beta} \neq 1$ operiert G_α transitiv, aber nicht regulär auf der Bahn Ω_1 . Hätte ein Element $\neq 1$ von G_α mehr als einen Fixpunkt auf Ω_1 , so hätte dieses Element mindestens drei Fixpunkte auf Ω , und G erfüllte die Bedingung a) der Definition der Zassenhausgruppen nicht.

ii) Wäre $G_\alpha = G_{\alpha\beta}$, so wäre wegen Bedingung a) der Definition der Zassenhausgruppen und wegen deren Transitivität auch $G_{\alpha\beta} = G_\beta$. Für ein Element $g \in G$ mit $\alpha^g = \beta$ gilt nun: $g^{-1}G_\alpha g = G_\beta = G_{\alpha\beta}$; also $g \in \mathcal{N}_G G_{\alpha\beta}$, aber $g \notin G_{\alpha\beta}$. Dies hieße aber $G_{\alpha\beta} = G_\alpha \neq \mathcal{N}_G G_\alpha$, im Widerspruch zur Bedingung b) der Definition der Zassenhausgruppen.

iii) Offenbar gilt stets $|\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} : G_{\alpha\beta}| \leq 2$. Es ist also bei Gültigkeit der zusätzlich in iii) gemachten Bedingung nur ein Element aus $\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta}$ aufzuzeigen, das nicht in $G_{\alpha\beta}$ liegt. — Wegen der Transitivität von G auf Ω gibt es ein Element $g \in G$ mit $\beta^g = \alpha$. Sei $\gamma = \alpha^g$. Wegen $G_{\alpha\beta} \neq 1$ gilt auch $g^{-1}G_{\alpha\beta}g = G_{\gamma\alpha} \neq 1$, und nach Voraussetzung gibt es ein Element $h \in G_\alpha$ mit $h^{-1}G_{\gamma\alpha}h = G_{\beta\alpha} = G_{\alpha\beta}$. Dann gilt $\alpha^{gh} = \beta$, $\beta^{gh} = \alpha$; das Element gh hat also die gewünschten Eigenschaften.

Hilfssatz 4. Für die Untergruppe U der Zassenhausgruppe G auf Ω gelte $1 \neq U_{\alpha\beta} \neq U \subseteq G_\alpha$; dann hat man $\mathcal{N}_G U \subseteq G_\alpha$.

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch, dann gäbe es ein Element $n \in \mathcal{N}_G U$ mit $\alpha^n = \gamma \neq \alpha$. Mit α ist dann aber auch γ ein Fixpunkt der Gruppe U , also $U \subseteq G_{\alpha\gamma}$. Da offenbar $\beta \neq \gamma$, hat die Untergruppe $U_{\alpha\beta}$ von U die Fixpunkte α, β, γ , ist also als Untergruppe der Zassenhausgruppe G auf Ω trivial; das widerspricht aber der Voraussetzung $1 \neq U_{\alpha\beta}$. — Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Hilfssatz 5. Für die Untergruppe U der Zassenhausgruppe G auf Ω gelte $1 \neq U_{\alpha\beta} \neq U_\alpha \neq U$ und es gebe ein Element $u \in U$ mit $\alpha^u = \beta$; dann operiert U als Zassenhausgruppe auf der Menge $\Omega_U = \{\alpha^U\}$.

Beweis. Die Untergruppe U operiert transitiv und nicht-regulär auf Ω_U . Kein Element $\neq 1$ von U hat mehr als zwei Fixpunkte auf Ω , also auch nicht auf Ω_U . Da es nach Voraussetzung Elemente $\neq 1$ von U gibt, die auf Ω_U zwei Fixpunkte haben, kann U keine Frobeniusgruppe auf Ω_U sein. — Um nun noch die Bedingung b) der Definition der Zassenhausgruppen für U nachzuweisen, betrachte man zunächst $\mathcal{N}_G U_\alpha$. Nach Hilfssatz 4 gilt $\mathcal{N}_G U_\alpha \subseteq G_\alpha$. Daher hat man

$$U_\alpha \subseteq \mathcal{N}_U U_\alpha = U \cap \mathcal{N}_G U_\alpha \subseteq U \cap G_\alpha = U_\alpha.$$

Aus der bisher gefundenen Information ergibt sich nun ein lokaler „Satz“, der auf die Bedeutung hinweist, den die endlich erzeugten Zassenhausgruppen für die Theorie der Zassenhausgruppen allgemein besitzen.

Satz 6. Genau dann ist die transitive Permutationsgruppe G auf der Menge Ω eine Zassenhausgruppe, wenn es zu jedem $\alpha \in \Omega$ ein lokales System Σ endlich erzeugter Untergruppen von G derart gibt, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Menge $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert.

Beweis. Sei G eine Zassenhausgruppe auf Ω , und seien a, b, c Elemente $\neq 1$ von G mit $a \in G_{\alpha\beta}$, $b \in G_\alpha \setminus G_{\alpha\beta}$, $\alpha^c = \beta$. Die Untergruppe $A = \langle a, b, c \rangle$ erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 5, daher ist A eine Zassenhausgruppe auf der Bahn $\Omega_A = \{\alpha^A\}$. Entsprechendes gilt für jede Untergruppe U von G , die A enthält. — Daher hat das

lokale System der endlich erzeugten Untergruppen von G , die A enthalten, die angegebene Eigenschaft.

Ist andererseits Σ ein lokales System von Untergruppen von G derart, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Menge $\Omega_U = \{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert, so ist klar, daß G nicht-regulär auf Ω operiert und daß kein Element $\neq 1$ von G mehr als zwei Fixpunkte auf Ω hat. Da es in G aber Elemente $\neq 1$ mit zwei Fixpunkten gibt, ist G keine Frobeniusgruppe. — Da nun für $U \in \Sigma$ gilt $U_\alpha \neq U_{\alpha\beta}$ (für $\alpha \neq \beta$), gilt auch $G_\alpha \neq G_{\alpha\beta}$ (für jedes $\beta \neq \alpha$). Dann ist aber α der einzige Fixpunkt von G_α auf Ω , und daher gilt $\mathcal{N}_G G_\alpha = G_\alpha$. — Damit sind die Bedingungen der Definition der Zassenhausgruppen für G nachgewiesen.

Für die folgende Ergänzung von Satz 6 sei an zwei Sprechweisen erinnert: Die Permutationsgruppe auf der Menge Ω operiert *halb-regulär*, wenn kein Element $\neq 1$ von G einen Fixpunkt auf Ω hat, G operiert *regulär*, wenn G auf Ω halb-regulär und transitiv operiert.

Zusatz 7. Die Zassenhausgruppe G auf der Menge Ω besitzt genau dann einen auf Ω (halb-) regulär operierenden Normalteiler $R \neq 1$, wenn es zu jedem $\alpha \in \Omega$ ein lokales System Σ endlich erzeugter Untergruppen von G derart gibt, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Menge $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert und einen auf $\{\alpha^U\}$ (halb-) regulär operierenden Normalteiler $R_U \neq 1$ derart besitzt, daß für jedes $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$ auch $R_U \subseteq R_V$ gilt.

Beweis. Sei Σ ein solches lokales System von G und sei $R = \bigcup_{U \in \Sigma} R_U$, dann ist R offenbar ein auf Ω (halb-) regulär operierender Normalteiler von G .

Ist andererseits $R \neq 1$ ein auf Ω halb-regulär operierender Normalteiler von G , und ist Σ ein lokales System von G der in Satz 6 beschriebenen Art, dann gibt es eine Untergruppe $U \in \Sigma$ mit $U \cap R \neq 1$. Offenbar operiert der Normalteiler $U_R = U \cap R$ von U halb-regulär auf $\{\alpha^U\}$. Das lokale System aller Untergruppen $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$ hat die geforderten Eigenschaften.

Ist R ein regulärer Normalteiler von G , so gilt $G = RG_\alpha$. Sei U_α irgendeine endlich erzeugte Untergruppe von G_α mit $U_\alpha \neq U_{\alpha\beta} \neq 1$. In R gibt es (genau) ein Element r mit $\alpha^r = \beta$. Sei nun $U = \langle U_\alpha, r, r_1, \dots, r_n \rangle$, dann ist $U_R = \langle r^U, r_1^U, \dots, r_n^U \rangle$ ein Normalteiler von U , der auf $\{\alpha^U\}$ regulär operiert. — Die auf diese Weise gebildeten endlich erzeugten Untergruppen von G bilden ein lokales System von G mit der gewünschten Eigenschaft.

Hilfssatz 8. Gilt in der Zassenhausgruppe G auf Ω die Ungleichung $\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} \neq G_{\alpha\beta}$ für ein passendes Paar α, β verschiedener Elemente aus Ω , und ist R ein regulärer Normalteiler von G , so enthält R ein Element der Ordnung 2, das $G_{\alpha\beta}$ zentralisiert. — Ist R eine 2-Gruppe, so besitzt $G_{\alpha\beta}$ kein Element der Ordnung 2, es sei denn, $G_{\alpha\beta}$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 3 und das Zentrum der von den Involutionen von R erzeugten Untergruppe hat die Form $Z = C \times C$, wobei C eine lokal zyklische 2-Gruppe ($\neq 1$) ist.

Beweis. G hat die Form $G = RG_\alpha$. Ist nun $\sigma: G \rightarrow G_\alpha$ der natürliche Epimorphismus von G auf G_α , dessen Kern R ist und der auf G_α die Identität ist, so folgt aus $G_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta})^\sigma = \mathcal{N}_{G_\alpha} G_{\alpha\beta}$ auch $(\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta})^\sigma = G_{\alpha\beta}$. Daher gilt $R \cap \mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} \neq 1$. Nach Hilfssatz 3.iii) hat die Gruppe $\mathcal{N}_R G_{\alpha\beta}$ dann die Ordnung 2, sie zentralisiert $G_{\alpha\beta}$.

Sei nun der reguläre Normalteiler R von G eine 2-Gruppe und sei t das Element $\neq 1$ aus $\mathcal{N}_R G_{\alpha\beta}$. Es sei $i \in G_{\alpha\beta}$ eine Involution. Offenbar gilt $\mathcal{C}_R i = \langle t \rangle$; denn sonst hätte i mehr als zwei Fixpunkte auf Ω . Ist nun j irgendeine Involution aus R mit $j \neq i$, dann ist $\langle i, j \rangle$ eine nicht-abelsche Diedergruppe; $\langle i, j \rangle$ hat als endliche 2-Gruppe ein Zentrum $\neq 1$, dieses hat die genaue Ordnung 2. Das einzige Element $\neq 1$ aus diesem Zentrum kann nur das Element t sein. Daher zentralisiert t jede Involution aus R . — Sei nun R_1 die Untergruppe von R , die von allen Involutionen in R erzeugt wird, und sei R_2 die größte elementar-abelsche, zentrale Untergruppe von R_1 . Dann gilt $t \in R_2$. Als charakteristische Untergruppe von R ist R_2 unter G_α invariant, und R_2 operiert regulär auf $\{\alpha^{R_1}\}$. Auf dieser Menge operiert $R_2 G_\alpha$ als Zassenhausgruppe. Daher gilt $|R_2| \geq 4$.

Sei nun $j \neq t$ irgendeine Involution aus R_2 , dann ist $ijij \in R_2$, und daher ist $ijij = t$. Sei $j' \neq t$ eine weitere Involution aus R_2 ; dann gilt $jij = j'ij'$ oder $i = jj'ij'j$. Ist $j \neq j'$, so gilt $jj' = t$, da dies Element die Involution i zentralisiert. Es kann in R_2 höchstens drei Involutionen geben, nämlich t, j und $j' = tj$. Damit gilt $|R_2| = 4$. Hieraus folgt sofort, daß $|G_\alpha| = 6$. — Da R_2 der Sockel von $\mathcal{Z}R_1$ ist, hat $\mathcal{Z}R_1$ genau zwei Invarianten; diese sind aber gleich, da G_α die Involutionen von R_2 transitiv permutiert.

Korollar 9. *Ist G eine zweifach-transitive Zassenhausgruppe auf Ω und ist $R \neq 1$ ein auf Ω halb-regulär operierender Normalteiler von G , so gilt $|\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} : G_{\alpha\beta}| = 2$ für jedes Element $\beta \neq \alpha$ aus Ω . Ist $R \neq 1$ ein auf Ω halb-regulär operierender Normalteiler von G , so ist R eine elementar-abelsche 2-Gruppe und operiert regulär auf Ω .*

Beweis. Da G auf Ω zweifach transitiv operiert, ist G_α transitiv auf den Untergruppen $G_{\alpha\beta}$ mit $\alpha \neq \beta$. Nach Hilfssatz 3.iii) gilt also $|\mathcal{N}_G G_{\alpha\beta} : G_{\alpha\beta}| = 2$. — Ist R ein halb-regulärer Normalteiler von G , so operiert die Gruppe RG_α als Zassenhausgruppe auf der Menge $\{\alpha^R\}$; dies folgt sofort aus Hilfssatz 5. Sei $r \neq 1$ ein Element aus R und $\alpha' = \beta$. Es gibt eine Involution $t \in R$, die die Untergruppe $G_{\alpha\beta}$ zentralisiert. Die Involution t vertauscht die Elemente α und β in Ω . Da G_α aber transitiv auf den Elementen $\neq \alpha$ von Ω operiert, enthält R für jedes $\gamma \neq \alpha$ aus Ω eine Involution, die α und γ vertauscht. Dann operiert R aber transitiv, d.h. regulär, auf Ω . Wegen der Regularität von R ist aber jedes Element $\neq 1$ von R eine Involution; daher ist R eine elementar-abelsche 2-Gruppe.

2. Lokal endliche Zassenhausgruppen.

Satz 10. *Besitzt die lokal endliche Zassenhausgruppe G auf Ω einen auf Ω halb-regulär operierenden Normalteiler $R \neq 1$, dann ist R eine nilpotente 2-Gruppe. Weiter hat die Frobeniusgruppe G_α (auf der Menge $\{\beta^{G_\alpha}\}$, wobei $G_{\alpha\beta} \neq 1$) einen lokal zyklischen Frobeniuskern K_α , dessen Elemente ungerade Ordnung haben, und ein endliches, zyklisches Frobeniuskomplement $G_{\alpha\beta}$. Ist dann die Ordnung von $G_{\alpha\beta}$ gerade, so gilt $|G_\alpha| = 6$. — Operiert G zweifach transitiv auf Ω und hat G einen auf Ω regulären Normalteiler R , so ist G endlich.*

Beweis. Für jedes $\beta \neq \alpha$ aus Ω mit $G_{\alpha\beta} \neq 1$ operiert G_α als Frobeniusgruppe auf der Menge $\{\beta^{G_\alpha}\}$. Dann besitzt die lokal endliche Frobeniusgruppe einen auf $\{\beta^{G_\alpha}\}$

regulär operierenden, nilpotenten Normalteiler K_α mit $G_\alpha = K_\alpha G_{\alpha\beta}$ und $K_\alpha \cap G_{\alpha\beta} = 1$ (vgl. [1], Satz 1 oder [6], Lemma 1.1). Die Sylowgruppen von $G_{\alpha\beta}$ sind lokal zyklisch oder (verallgemeinerte) Quaternionengruppen. Weiter operiert die Gruppe RK_α als Frobeniusgruppe auf der Menge $\{\alpha^R\}$. Daher ist der Frobeniuskern R dieser Frobeniusgruppe nilpotent, und in der nilpotenten Gruppe K_α ist jede Sylowgruppe entweder lokal zyklisch oder eine (verallgemeinerte) Quaternionengruppe. Besäße die nilpotente Gruppe K_α Elemente gerader Ordnung, so gäbe es in K_α eine charakteristische Untergruppe der Ordnung 2. Diese würde jedoch von $G_{\alpha\beta}$ zentralisiert, was nicht geht. Also hat jedes Element von K_α ungerade Ordnung, und K_α ist damit lokal zyklisch. Dann ist aber die Automorphismengruppe von K_α — und damit auch $G_{\alpha\beta}$ — abelsch. Daher ist $G_{\alpha\beta}$ lokal zyklisch. Sei nun p eine Primzahl, die als Ordnung eines Elements von K_α auftritt, dann operiert $G_{\alpha\beta}$ als eine Frobeniusgruppe von Automorphismen auf der (einzigen) Untergruppe der Ordnung p von K_α . Daher gilt $|G_{\alpha\beta}| \mid p - 1$, und $G_{\alpha\beta}$ ist insbesondere endlich.

Da der Normalteiler $R \neq 1$ nilpotent und lokal endlich ist, darf man annehmen, R sei primär. Die Elemente $\neq 1$ von K_α operieren fixpunktfrei auf R . Operierten auch die übrigen Elemente von G_α fixpunktfrei auf R , dann operierte die Gruppe RG_α als Frobeniusgruppe auf der Menge $\{\alpha^R\}$ und das Frobeniuskomplement G_α hätte nach ([1], Eigenschaft 14, S. 281) ein nicht-triviales Zentrum. Das kann aber nicht sein, da G_α selbst eine Frobeniusgruppe ist.

Es gibt also ein Element $a \in G_\alpha \setminus K_\alpha$, das in R ein Fixelement $r \neq 1$ besitzt. Man darf nun annehmen $a \in G_{\alpha\beta}$, da jedes Element von $G_\alpha \setminus K_\alpha$ in einer zu $G_{\alpha\beta}$ konjugierten Untergruppe von G_α liegt. Mit α und β sind aber auch α^r und β^r Fixpunkte des Elements a . Da a aber genau zwei Fixelemente in Ω besitzt und da R halb-regulär operiert, ist notwendig $\alpha^r = \beta$ und $\beta^r = \alpha$. Daher hat r die Ordnung 2, und es gilt $r \in \mathcal{N}_R G_{\alpha\beta}$. Also ist R eine 2-Gruppe.

Ist die Ordnung von $G_{\alpha\beta}$ gerade, so ergibt sich $|G_\alpha| = 6$ aus Satz 6.

Ist G zweifach transitiv auf Ω , so ist R nach Korollar 9 elementar-abelsch und operiert regulär auf Ω . Da K_α transitiv auf den Elementen $\neq \alpha$ von Ω operiert, ist die Frobeniusgruppe RK_α auf Ω scharf zweifach transitiv. Der zu RK_α gehörige Fastkörper (vgl. [11]) ist ein absolut algebraischer Körper der Charakteristik 2. Die Gruppe $G_{\alpha\beta}$ entspricht einer Gruppe von Automorphismen dieses Körpers, die nur den Primkörper elementweise festläßt. Da $G_{\alpha\beta}$ endlich ist, ist auch der Körper endlich über dem Primkörper, also von endlicher Ordnung. Das heißt aber, daß G endlich ist. (Die genaue Beschreibung der endlichen, zweifach transitiven Zassenhausgruppen mit regulärem Normalteiler findet sich in [3], § 4.)

Als Ergänzung zu Satz 10 sei eine nützliche Verschärfung eines Teils der Aussage von Zusatz 7 angegeben:

Zusatz 11. A) Die lokal endliche Zassenhausgruppe G auf der Menge Ω besitzt genau dann einen auf Ω regulär operierenden Normalteiler R , wenn es zu jedem $\alpha \in \Omega$ ein lokales System Σ endlicher Untergruppen von G derart gibt, daß jedes $U \in \Sigma$ einen auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ regulär operierenden Normalteiler R_U besitzt.

B) Besitzt die lokal endliche Zassenhausgruppe G auf Ω einen auf Ω regulär operierenden Normalteiler R , so besitzt jedes lokale System Σ endlicher Untergruppen von G

ein Teilsystem Σ_1 so, daß jedes $U \in \Sigma_1$ einen Normalteiler R_U besitzt, der regulär auf der Menge $\{\alpha^U\}$ operiert.

Beweis. A) Die Notwendigkeit der unter A) gemachten Bedingung ist nach Zusatz 7 klar. — Sei also Σ ein lokales System endlicher Untergruppen von G mit der angegebenen Eigenschaft. Nach Hilfssatz 5 gibt es eine Untergruppe $U \in \Sigma$, die auf $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert. Sei Σ_1 das lokale System von G , das aus allen U enthaltenden Untergruppen $V \in \Sigma$ von G besteht. Dann ist jedes $V \in \Sigma_1$ eine Zassenhausgruppe mit einem auf $\{\alpha^V\}$ regulär operierenden Normalteiler R_V . Dieser reguläre Normalteiler R_V ist nach Satz 10 genau die 2-Sylowgruppe der Untergruppe V_1 von V , die von den Elementen ungerader Ordnung von V erzeugt wird. Ist nun $W \in \Sigma_1$ mit $V \subseteq W$, so gilt offenbar $V_1 \subseteq W_1$, und daher auch $R_V \subseteq R_W$. Damit ist die fehlende Bedingung aus Zusatz 7 hergeleitet. — Die Untergruppen R_V , $V \in \Sigma_1$, bilden ein lokales System des auf Ω regulär operierenden Normalteilers R von G .

B) Nach Hilfssatz 5 gibt es eine Untergruppe $U \in \Sigma$, die auf $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert. Das lokale System Σ_1 aller $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$ erfüllt unsere Forderung: Nach Hilfssatz 5 ist jedes $V \in \Sigma_1$ eine Zassenhausgruppe auf der Bahn $\{\alpha^V\}$; und da G einen regulär auf Ω operierenden Normalteiler besitzt, ist die von den Elementen ungerader Ordnung in G erzeugte Untergruppe G_1 2-abgeschlossen. Daher ist jede von Elementen ungerader Ordnung erzeugte Untergruppe von G 2-abgeschlossen. Da alle Elemente ungerader Ordnung von G mindestens einen Fixpunkt auf Ω haben, sieht man leicht, daß für jedes $V \in \Sigma_1$ die 2-Sylowgruppe der von den Elementen ungerader Ordnung in V erzeugten Untergruppe V_1 ein auf $\{\alpha^V\}$ regulär operierender Normalteiler von V ist.

Wegen der scharfen Strukturaussagen von Satz 10 (und Zusatz 11) sollen nun die lokal endlichen Zassenhausgruppen, die einen regulären Normalteiler besitzen, als weitgehend bekannt angesehen werden.

Wir betrachten nun eine lokal endliche Zassenhausgruppe G auf Ω , die keinen auf Ω regulär operierenden Normalteiler besitzt; dann hat G nach Zusatz 11 ein lokales System Σ endlicher Untergruppen derart, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert, aber keinen auf $\{\alpha^U\}$ regulär operierenden Normalteiler besitzt. Man wird so zwangsläufig zur Frage nach der Struktur endlicher Zassenhausgruppen ohne regulären Normalteiler geführt. Über solche Gruppen handelt die Dissertation von KELLER [7]; zwei Resultate aus dieser Arbeit werden wir wesentlich benutzen:

K 1 ([7], Theorem 4.1): *Ist G eine endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf der Menge Ω und ist $|G_\alpha|$ gerade, so ist G entweder zweifach transitiv auf Ω , oder aber G ist einfach, $|G| = 60$ und $|\Omega| = 10$.*

K 2 ([7], Theorem 5.2 und Corollary 5.5): *Ist G eine endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf der Menge Ω und ist $|G_\alpha|$ ungerade, so ist G entweder zweifach transitiv auf Ω , oder aber G besitzt einen einfachen Hallschen Normalteiler H so, daß G/H zyklisch oder metazyklisch ist und daß H als Zassenhausgruppe auf Ω operiert.*

Bemerkung. Es scheinen keine Beispiele von Gruppen bekannt zu sein, die die Voraussetzungen von Satz K 2 erfüllen, aber nicht zweifach transitiv sind.

Diese beiden Resultate lassen sich ohne weiteres auf lokal endliche Gruppen ausdehnen:

Satz 12 (K 1). *Ist G eine lokal endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf der Menge Ω und liegt eine Involution in G_α , so ist entweder G zweifach transitiv auf Ω , oder aber G ist einfach, $|G| = 60$ und $|\Omega| = 10$.*

Beweis. Ist G endlich, so ist wegen K 1 nichts zu zeigen. — Sei also G unendlich. Nach Zusatz 11 gibt es in G ein lokales System Σ endlicher Untergruppen, so daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert und keinen auf $\{\alpha^U\}$ regulär operierenden Normalteiler besitzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man für jedes $U \in \Sigma$ annehmen: $|U| > 60$ und es gibt eine Involution in U_α . Dann operiert U aber nach K 1 auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ zweifach transitiv. Da dies für jede Untergruppe $U \in \Sigma$ gilt, operiert auch $G = \bigcup_{U \in \Sigma} U$ zweifach transitiv auf Ω .

Satz 13 (K 2). *Ist G eine lokal endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf der Menge Ω und gibt es in G_α keine Involution, so ist entweder G zweifach transitiv auf Ω , oder aber es gibt einen Normalteiler H von G derart, daß Elemente aus H und aus G/H zueinander teilerfremde Ordnungen haben, daß G/H lokal zyklisch oder lokal metazyklisch ist und daß H einfach ist und auf Ω als Zassenhausgruppe operiert.*

Beweis. Ist G endlich, so ist wegen K 2 nichts zu zeigen. — Sei also G unendlich. Nach Zusatz 11 gibt es ein lokales System Σ endlicher Gruppen in G so, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert und keinen auf $\{\alpha^U\}$ regulär operierenden Normalteiler besitzt. Die Untergruppen U_α haben für $U \in \Sigma$ ungerade Ordnung, da G_α keine Involution enthält. — Operiert jedes $U \in \Sigma$ zweifach transitiv auf der Bahn $\{\alpha^U\}$, so sieht man leicht, daß auch G zweifach transitiv auf Ω operiert. — Wir nehmen nun an, dies sei für kein solches lokale System der Fall. Dann gibt es ein lokales System Σ von G , für dessen Glieder die zweite der Möglichkeiten aus K 2 eintritt. Es gilt also insbesondere: für jedes $U \in \Sigma$ ist U'' eine einfache Hallgruppe von U . Da die Untergruppen U'' , $U \in \Sigma$, ein lokales System von G'' bilden, ist offenbar die Gruppe G'' einfach. Sei $H = G''$. Offenbar hat G/H ein lokales System aus endlichen zyklischen oder metazyklischen Gruppen, nämlich die Untergruppen UH/H , $U \in \Sigma$. Damit ist G/H lokal zyklisch oder lokal metazyklisch. — Daß die Elemente aus H und aus G/H teilerfremde Ordnung haben, ist klar. — Da die Untergruppen U'' , $U \in \Sigma$, ein lokales System von H derart bilden, daß U'' auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ als Zassenhausgruppe operiert, muß H nach Satz 6 auf Ω auch als Zassenhausgruppe operieren.

Satz 14. *Die lokal endliche Zassenhausgruppe G auf der Menge Ω besitzt genau dann einen auf Ω regulär operierenden Normalteiler, wenn G einen abelschen (halb-regulären) Normalteiler $\neq 1$ besitzt.*

Beweis. Besitzt G einen regulären Normalteiler R , so ist R nach Satz 10 eine nilpotente 2-Gruppe; das Zentrum $\mathcal{Z}R$ ist ein abelscher (halb-regulärer) Normalteiler von G .

Sei nun $A \neq 1$ ein abelscher Normalteiler der lokal endlichen Zassenhausgruppe G auf Ω . Wegen der Bedingung a) der Definition der Zassenhausgruppen gilt $A \cap G_\alpha = 1$.

Ist G nun zweifach transitiv auf Ω , dann ist G_α eine maximale Untergruppe von G . Wegen $G = AG_\alpha$ ist dann A ein regulärer Normalteiler.

Sei die Zassenhausgruppe G nun nicht zweifach transitiv auf Ω . Hat G keinen regulären Normalteiler, so ist nach Satz 12 und Satz 13 die Untergruppe G'' einfach und operiert als Zassenhausgruppe auf Ω . Aber dann zentralisieren A und G'' einander. Da α der einzige Fixpunkt von $(G'')_\alpha$ ist, gilt offenbar: $A \subseteq G_\alpha$. Dies gilt aber für alle $\alpha \in \Omega$; daher ist $A = 1$. — Die Annahme „ G enthält keinen regulären Normalteiler“ führt also zum Widerspruch zur Annahme, daß G einen abelschen Normalteiler $\neq 1$ besitze.

Die Sätze 12 und 13 geben uns in vielen Fällen die Existenz eines lokalen Systems Σ in einer lokal endlichen Zassenhausgruppe G ohne regulären Normalteiler, das aus endlichen Zassenhausgruppen U besteht, die auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ in Ω zweifach transitiv operieren. Die Struktur der endlichen, zweifach transitiven Zassenhausgruppen ist aber nach den Arbeiten von FEIT [3], ITO [5] und SUZUKI [8] wohlbekannt. Das im weiteren verwandte Ergebnis lautet:

(FIS) *Ist G eine endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf Ω und operiert G zweifach transitiv auf Ω , so ist G entweder zu einer der einfachen Gruppen $S(2^{2n+1})$ von SUZUKI isomorph oder zu $PSL(2, p^n)$, oder aber G operiert scharf dreifach transitiv auf Ω .*

Für lokal endliche Zassenhausgruppen hat man dann den

Satz 15. *Die lokal endliche Zassenhausgruppe G ohne regulären Normalteiler auf Ω besitzt genau dann für jedes $\alpha \in \Omega$ ein lokales System Σ endlicher Untergruppen so, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ zweifach transitiv operiert, wenn G entweder isomorph ist zu einer einfachen Gruppe von SUZUKI $S(K)$ über einem lokal endlichen Körper K der Charakteristik 2 oder zu $PSL(2, K)$ für einen lokal endlichen Körper K , oder aber wenn G scharf dreifach transitiv auf Ω operiert.*

Beweis. Ist G endlich, so ist wegen (FIS) nichts zu zeigen. — Sei also G unendlich und besitze ein solches lokales System Σ endlicher Untergruppen. Ist die Untergruppe $U \in \Sigma$ isomorph zu einer der einfachen Gruppen $S(2^{2n+1})$ von SUZUKI, so ist jede Untergruppe $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$ zu einer der einfachen Gruppen von SUZUKI isomorph, da eine solche Gruppe nicht in $PSL(2, p^n)$ oder einer scharf dreifach transitiven endlichen Gruppe eingebettet werden kann. In diesem Falle ist G nach [6], Satz 4.1 zu einer der einfachen Gruppen $S(K)$ von SUZUKI isomorph, wobei K ein lokal endlicher Körper der Charakteristik 2 ist, der keinen Teilkörper der Ordnung 4 besitzt.

Hat G aber ein lokales Teil-System $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, das aus endlichen Untergruppen vom Typ $PSL(2, \quad)$ besteht, so ist — wieder nach [6], Satz 4.1 — G isomorph zu $PSL(2, K)$ für einen passenden lokal endlichen Körper K .

Trifft keine der beiden eben betrachteten Möglichkeiten zu, so gibt es zu jeder Untergruppe $U \in \Sigma$ eine Untergruppe $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$, die auf der Bahn $\{\alpha^V\}$ scharf dreifach transitiv operiert. Die Menge dieser Untergruppen von G bildet ein lokales Teilsystem $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ von G . Offenbar operiert G dann scharf dreifach transitiv auf Ω .

Ist andererseits G isomorph zu $S(K)$ oder $PSL(2, K)$ für einen lokal endlichen Körper K , so bilden die zu $S(E)$ oder zu $PSL(2, E)$ isomorphen Untergruppen von G , wobei E die endlichen Teilkörper von K durchläuft, ein lokales System Σ von G . Das Teilsystem aller $U \in \Sigma$ mit $U_\alpha \neq 1$ erfüllt alle Forderungen.

Operiert nun G scharf dreifach transitiv auf Ω , so operiert die Frobeniusgruppe G_α scharf zweifach transitiv auf der Menge $\Omega \setminus \alpha$. Daher ist der Frobeniuskern K_α von G_α eine elementar-abelsche p -Gruppe. Ist $p \neq 2$, so gibt es in $G_{\alpha\beta}$ ein Element i mit $k^i = k^{-1}$ für jedes $k \in K_\alpha$, da $G_{\alpha\beta}$ auf den Elementen $\neq 1$ von K_α transitiv operiert. Also gibt es sowohl im Falle $p = 2$ als auch im Falle $p \neq 2$ in der Untergruppe G_α Elemente der Ordnung 2. Aber dann gibt es nach Zusatz 11 ein lokales System Σ endlicher Untergruppen von G so, daß für jedes $U \in \Sigma$ die Untergruppe U_α gerade Ordnung hat und U als Zassenhausgruppe und ohne regulären Normalteiler auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ operiert. Da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf: $|U| > 60$, operiert dann aber nach K 1 die Gruppe U sogar zweifach transitiv auf der Bahn $\{\alpha^U\}$. — Damit ist der Satz bewiesen.

Nun können wir die Erweiterung der Beschreibung der scharf dreifach transitiven endlichen Permutationsgruppen von ZASSENHAUS [11] (vgl. auch TITS [10] und HUPPERT [4]) auf den lokal endlichen Fall geben:

Satz 16. *Die lokal endliche Gruppe G operiere scharf dreifach transitiv auf der Menge Ω ; dann gibt es einen lokal endlichen Körper K so, daß man die Elemente von Ω mit denen der Menge $\{K, \infty\}$ identifizieren kann. — G ist dann entweder $PGL(2, K)$, d. h. die Menge der Abbildungen*

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in K,$$

von $\{K, \infty\}$ auf sich (d. h. $ad - bc \neq 0$), oder aber der Körper K besitzt einen Automorphismus σ der Ordnung 2 und G ist die Menge der Abbildungen

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in K,$$

falls $ad - bc$ ein Quadrat ist, und der Abbildungen

$$x \mapsto \frac{ax^\sigma + b}{cx^\sigma + d}, \quad a, b, c, d \in K,$$

falls $ad - bc$ kein Quadrat ist, von $\{K, \infty\}$ auf sich.

Gruppen der zweiten Art wollen wir vom *Mathieuschen Typ* nennen.

Beweis. Für endliche Gruppen ist dieser Satz nach ZASSENHAUS bekannt. Sei also G unendlich. Da G scharf dreifach transitiv auf Ω operiert, ergibt Satz 15, daß es ein lokales System Σ endlicher Untergruppen von G derart gibt, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ als zweifach transitive Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler operiert. Da sich eine Suzukigruppe nicht in eine scharf dreifach transitive lokal endliche Permutationsgruppe einbetten läßt, ist U entweder vom Typ $PSL(2, \quad)$, oder aber U operiert scharf dreifach transitiv auf $\{\alpha^U\}$.

Gibt es in Σ ein lokales Teilsystem Σ' von G derart, daß jedes $U \in \Sigma_1$ vom Typ $PSL(2, \quad)$ ist, so ist auch G — nach [6], Satz 4.1 — isomorph zu $PSL(2, K)$, wobei

K ein lokal endlicher Körper der Charakteristik p ist. Eine Darstellung von G als Zassenhausgruppe ist dann stets permutationsisomorph zur Darstellung von G , die durch Transformation auf der Menge der p -Sylowgruppen von G definiert ist. Diese Menge läßt sich auf übliche Weise durch die Menge $\{K, \infty\}$ beschreiben. G ist auf dieser Menge genau dann dreifach transitiv, wenn entweder $p = 2$ oder aber der Körper K quadratisch abgeschlossen ist. In beiden Fällen gilt: $G = PSL(2, K) \cong PGL(2, K)$ (vgl. [6], §§ 3 und 4). Aber dann besitzt G ein lokales System endlicher Untergruppen U , so daß U auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ scharf dreifach transitiv operiert.

Sei also nun Σ ein lokales System endlicher Untergruppen von G so, daß jedes $U \in \Sigma$ scharf dreifach transitiv auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ operiert. Ist jedes $U \in \Sigma$ vom Typ $PGL(2, \quad)$, dann ist G nach [6], Satz 4.1 isomorph zu $PGL(2, K)$ für einen passenden lokal endlichen Körper K .

Sei weiter die Untergruppe $U \in \Sigma$ von G vom Mathieschen Typ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$, so ist auch jede Untergruppe $V \in \Sigma$ mit $V \supseteq U$ von G vom Mathieschen Typ auf der Bahn $\{\alpha^V\}$, da $PGL(2, p^n)$ keine Untergruppe vom Mathieschen Typ besitzt (vgl. die Übersicht über die Untergruppen von $PGL(2, p^n)$ in [2], chapter 12). Für jede endliche Permutationsgruppe U vom Mathieschen Typ gilt: $|U : U'| = 2$, und U' ist vom Typ $PSL(2, E)$ für einen endlichen Körper E ungerader Charakteristik. Dann sieht man aber sofort, daß für jedes $V \in \Sigma$ mit $U \subseteq V$ gilt $U \cap V' = U'$. Daher hat G' ein lokales System von endlichen Untergruppen des Typs $PSL(2, \quad)$, und es gilt $|G : G'| = 2$. Nach [6], Satz 4.1 ist dann G' isomorph zu $PSL(2, K)$ für einen lokal endlichen Körper K ungerader Charakteristik. Somit können wir Ω mit $\{K, \infty\}$ indizieren.

Wegen $G \neq PGL(2, K)$ und $|G : G'| = 2$ folgt aus $G' = PSL(2, K)$, daß der lokal endliche Körper K (genau) einen Automorphismus σ der Ordnung 2 besitzt. Sei K_0 der größte Teilkörper von K , der aus dem Primkörper $GF(p)$ von K durch iterierte quadratische Erweiterungen hervorgeht. Dann sieht man leicht, daß K_0 endlich ist. Für jeden endlichen K_0 enthaltenden Unterkörper E von K gilt: $E^\sigma = E$, und E besteht nicht nur aus Fixelementen von σ . Seien $F \supseteq E \supseteq K_0$ endliche Teilkörper von K , dann ist ein Element $e \in E$ genau dann ein Quadrat in E , wenn es ein Quadrat in F ist.

Ist nun Σ_1 das Teilsystem von Σ , das aus all den $U \in \Sigma$ besteht, die (für eine feste Koordinatisierung) die Gruppe $PSL(2, K_0)$ enthalten. Dann ist jedes solche $U \in \Sigma_1$ eine Gruppe vom Mathieschen Typ auf der Menge $\{\alpha^U\}$ und damit isomorph zur Gruppe vom Mathieschen Typ über einem endlichen, K_0 enthaltenden Unterkörper E von K . — Da nun aber die Quadratklassen der endlichen, K_0 enthaltenden Unterkörper von K richtig zusammenpassen, stimmen auch die jeweiligen Beschreibungen der $U \in \Sigma_1$ als Gruppen vom Mathieschen Typ über $E \supseteq K_0$ zusammen, und man erhält, daß G selbst tatsächlich von Mathieschem Typ über dem Körper K ist.

Bemerkungen. 1. Aus vorstehendem Beweis ergibt sich insbesondere noch die Aussage: *Die lokal endliche, transitive Permutationsgruppe G operiert auf Ω genau dann scharf dreifach transitiv, wenn es ein lokales System Σ endlicher Untergruppen von G derart gibt, daß jedes $U \in \Sigma$ auf der Bahn $\{\alpha^U\}$ scharf dreifach transitiv operiert.*

2. Aus der in Satz 15 betrachteten Situation erhält man unter Benutzung von [6], Satz 4.1 oder Satz 16, daß G (und damit Ω) abzählbar ist. Kann man das auch in dem Fall beweisen, in dem die Untergruppe G_α der lokal endlichen Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler auf Ω keine Involution enthält?

3. Gilt etwa allgemein: Ist G eine lokal endliche zweifach transitive Permutationsgruppe auf Ω so, daß jedes Element $\neq 1$ von G nur endlich viele „Punkte“ auf Ω festläßt, dann ist Ω abzählbar? — Jedenfalls ist mir hierzu kein Gegenbeispiel bekannt.

Satz 17. *Ist G eine lokal endliche Zassenhausgruppe auf der Menge Ω so, daß jedes Element von G mindestens ein Element von Ω festläßt, dann gilt $G = \text{PGL}(2, K)$ für einen quadratisch abgeschlossenen lokal endlichen Körper K .*

Beweis. Nach Voraussetzung überdecken die Untergruppen der Form G_α ganz G . Da die Untergruppen G_α Frobeniusgruppen sind, überdecken die Konjugierten der Untergruppen K_α und $G_{\alpha\beta}$ die ganze Gruppe G . Diese Überdeckung ist offenbar eine normale Partition von G . Nun ergibt [6], Korollar 4.4 die Aussage des Satzes.

Literaturverzeichnis

- [1] V. M. BUSARKIN und A. I. STAROSTIN, Über Partitionen lokal endlicher Gruppen. Mat. Sbornik **62**, 275–294 (1963).
- [2] L. E. DICKSON, Linear Groups. Leipzig 1901.
- [3] W. FEIT, On a class of doubly transitive permutation groups. Illinois J. Math. **4**, 170–186 (1960).
- [4] B. HUPPERT, Scharf dreifach transitive Permutationsgruppen. Arch. Math. **13**, 61–72 (1962).
- [5] N. ITO, On a class of doubly transitive permutation groups. Illinois J. Math. **6**, 341–352 (1962).
- [6] O. H. KEGEL, Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition. Arch. Math. **13**, 10–28 (1962).
- [7] G. E. KELLER, Groups with only the identity fixing three letters. Ph. D. Thesis, California Institute of Technology 1965.
- [8] M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups. Ann. of Math., II Ser. **75**, 105–145 (1962).
- [9] J. G. THOMPSON, Finite groups with fixed-point-free automorphism of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45**, 578–581 (1959).
- [10] J. TITS, Généralisations des groupes projectifs. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci. Mém. Coll. 5^e Sér. **35**, 197–208, 224–233, 568–589, 756–773 (1949).
- [11] H. ZASSENHAUS, Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 17–40 (1936).

Eingegangen am 5. 10. 1966

Anschrift des Autors:

Otto H. Kegel
Mathematisches Seminar der Universität
6 Frankfurt