OTTO H. KEGEL

Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen

Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen*

Frau Professor Dr. RUTH MOUFANG zum 10. Januar 1965 gewidmet

Von
OTTO H. KEGEL

Besitzt die endliche Gruppe G eine Faktorisierung $G=AB$, so schränkt die Struktur der Untergruppen A und B die mögliche Struktur von G sehr ein. Gibt es noch eine weitere Untergruppe C von G , so daß G die Form

$$G=AB=BC=CA$$

hat, dann ist der Einfluß der Struktur der drei „Faktoren“ A , B , C auf die Struktur von G noch viel stärker. Bisher weiß man aber noch nicht sehr genau über diesen Einfluß Bescheid. Hier bietet sich die folgende Vermutung an.

Vermutung. Hat die endliche Gruppe G die Form $G=AB=BC=CA$ für passende, auflösbare Untergruppen A , B , C , dann ist G auflösbar.

Für den Spezialfall, daß die Indizes der Untergruppen A , B , C in G paarweise teilerfremd sind, hat WIELANDT diese Vermutung bewiesen [8]. Will man in diesem Satz ohne Voraussetzung über die Einbettung der Untergruppen A , B , C auskommen, so muß man bis jetzt noch die Struktur dieser Untergruppen etwas einschränken. In dieser Note wird die Auflösbarkeit von G gezeigt, falls A und B einen Sylow-Turm für eine feste Anordnung der Primzahlen besitzen und C auflösbar ist (Satz 3).

Durch ähnliche Faktorisierungseigenschaften lassen sich auch nilpotente und überauflösbare Gruppen charakterisieren. Vielleicht läßt sich Satz 2, der eine Charakterisierung der überauflösbaren Gruppen gibt, zu einem Prinzip ausbauen, das es erlaubt, die auflösbaren Gruppen der Form $G=AB$ mit nilpotenten Untergruppen A und B zu klassifizieren.

Bei diesen Betrachtungen drängt sich wiederholt die folgende Frage auf: Ist die endliche Gruppe G nicht-einfach, wenn es echte Untergruppen A , B , C von G mit $G=AB=BC=CA$ gibt? Ist in diesem Falle etwa eine dieser drei Untergruppen in einem echten Normalteiler von G enthalten? Es scheint zur Zeit noch völlig unklar, wie man diese Frage angreifen soll.

Die folgenden Überlegungen beruhen vor allem auf dem einfachen

Hilfssatz 1. *Gibt es in der endlichen Gruppe G drei Klassen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ konjugierter Untergruppen, so daß für jedes Paar X , Y von Vertretern verschiedener dieser Klassen gilt $XY=YX$, und bilden diese Produkte eine einzige Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Untergruppen, dann sind je zwei Elemente aus $\mathfrak{K}$ miteinander vertauschbar; insbesondere ist jedes $K \in \mathfrak{K}$ subnormal in G .*

* Research done at the University of Chicago, supported in part by the National Science Foundation.

Beweis. Seien A, B, C_1 beliebige Vertreter der Klassen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Sei $AB=K$; dann ist $BC_1=K^{g^{-1}}$ für ein passendes $g \in G$, und $K=B^g C_1^g$. Wir nennen nun $C_1^g=C$. Es ist $A \subseteq K$ und $C \subseteq K$, also auch $AC \subseteq K$. Da AC eine zu K konjugierte Untergruppe von K ist, so gilt sogar $AC=K$, und ebenso $BC=K$. Ist nun h ein beliebiges Element aus G , so gilt $K^h=B^h C^h=C^h A^h$. Da die Untergruppe A mit B^h und mit C^h vertauschbar ist, so ist A mit K^h vertauschbar; da B mit A^h und mit C^h vertauschbar ist, so ist B mit K^h vertauschbar. Also ist $K=AB$ mit K^h vertauschbar. Daß K subnormal ist, wenn es mit all seinen Konjugierten vertauschbar ist, ist der Inhalt der Note [6] von SZÉP.

Nach P. HALL [2] erfüllt die endliche Gruppe G die Bedingung E_π für die Primzahlmenge π , wenn es in G eine π -Hall-Gruppe gibt. G erfüllt die Bedingung D_π , wenn in G jede π -Untergruppe in einer π -Hall-Gruppe enthalten ist und wenn außerdem die π -Hall-Gruppen von G untereinander konjugiert sind.

Hilfssatz 2. *Erfüllt die endliche Gruppe G die Bedingung D_π und sind A und B die Bedingung E_π erfüllende Untergruppen von G derart, daß $G=AB$ gilt, dann gibt es eine π -Hall-Gruppe von G , die das Produkt einer π -Hall-Gruppe von A mit einer π -Hall-Gruppe von B ist.*

Dies ist im wesentlichen Satz 10 aus WIELANDT [7].

Aus diesen beiden Hilfssätzen ergibt sich nun direkt der

Satz 1. *Erfüllt die endliche Gruppe G die Bedingung D_π für die Primzahlmenge π , dann ist G genau dann π -abgeschlossen, wenn es in G π -abgeschlossene Untergruppen A, B, C gibt mit $G=AB=BC=CA$.*

Beweis. Ist G π -abgeschlossen, so wähle man $A=B=C=G$. Dies zeigt die Notwendigkeit der Bedingung. — Für ihr Hinreichen bemerke man, daß nach Hilfssatz 2, die (normalen) π -Hall-Gruppen X_π, Y_π von X bzw. Y miteinander vertauschbar sind, wenn X eine der Gruppen A, B, C und Y eine der beiden anderen ist. Nun ergibt aber Hilfssatz 1, daß die π -Hall-Gruppe $X_\pi Y_\pi$ von G ein Subnormalteiler von G ist. Ist aber eine Hall-Gruppe von G subnormal, so ist sie charakteristisch.

Ist σ eine (partielle) Anordnung der Menge aller Primzahlen, so heißt die endliche Gruppe G nach BAER σ -verstreut, wenn G π -abgeschlossen ist für jede Primzahlmenge π , die jeden Primteiler der Ordnung von G enthält, der (im Sinne von σ) größer ist als irgendeine Primzahl in π .

Folgerung 1. *Ist σ eine (partielle) Anordnung der Menge aller Primzahlen und ist π eine beliebige Primzahlmenge, dann besitzt die endliche Gruppe G genau dann eine normale, σ -verstreute π -Hall-Gruppe, wenn es in G Untergruppen A, B, C gibt, die normale, σ -verstreute π -Hall-Gruppen besitzen und $G=AB=BC=CA$ erfüllen.*

Beweis. Der Satz wird durch Induktion nach der Gruppenordnung bewiesen. Da sich die Faktorisierung von G auf alle homomorphen Bilder von G vererbt, genügt es, zu zeigen, daß für einen σ -maximalen Primteiler der Ordnung von G , der in π liegt, die zugehörige Sylow-Gruppe normal ist.

Dies ist aber die Aussage von Satz 1, wobei die Primzahlmenge dort nur aus einer Primzahl besteht.

Durch Spezialisierung erhält man insbesondere

Folgerung 2. Die endliche Gruppe G ist genau dann nilpotent, wenn es in G nilpotente Untergruppen A, B, C mit $G = AB = BC = CA$ gibt.

Diese Ergebnisse legen die Frage nahe: „Welche Eigenschaften $\mathcal{P}$ endlicher Gruppen haben die Eigentümlichkeit, daß die endliche Gruppe G (genau dann) die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat, wenn es Untergruppen A, B, C von G gibt, die die Eigenschaft $\mathcal{P}$ haben und $G = AB = BC = CA$ erfüllen?“

Kommutativität und Überauflösbarkeit haben diese Eigenschaft nicht; für die Kommutativität zeigen dies die nicht-abelschen Gruppen der Ordnung p^3 , p eine Primzahl, und für die Überauflösbarkeit die nicht-überauflösbaren Gruppen, deren echte Untergruppen alle überauflösbar sind und deren Ordnungen drei verschiedene Primteiler haben (vgl. HUPPERT [4]).

Aber auch die Überauflösbarkeit läßt sich durch eine ähnliche Produkteigenschaft beschreiben.

Satz 2. *Die endliche Gruppe G ist genau dann überauflösbar, wenn es in G nilpotente Untergruppen A und B sowie eine überauflösbare Untergruppe C gibt, so daß $G = AB = BC = CA$ gilt.*

Beweis. Daß es in einer überauflösbaren Gruppe G solche Untergruppen gibt, ist klar: Man wähle $A = G'$, $B = \text{Normalisator eines Sylow-Systems}$ und $C = G$.

Angenommen nun, der Satz sei falsch. Sei G ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung, dann ist jedes echte homomorphe Bild von G überauflösbar.

a) G hat einen einzigen minimalen Normalteiler $M \neq 1$, und M ist nicht zyklisch.

Gäbe es zwei verschiedene minimale Normalteiler N und M von G , so ließe sich G isomorph in die überauflösbare Gruppe $G/M \times G/N$ einbetten. G wäre also überauflösbar, was nicht der Fall ist. — Wäre M zyklisch, so wäre G überauflösbar, was nicht der Fall ist.

b) Ist P eine p -Sylow-Gruppe von G für den größten Primteiler p der Ordnung von G , dann gilt $P = M = A_p B_p = B_p C_p = C_p A_p$, und $P = M$ ist elementar abelsch.

Da C_p ein Normalteiler der überauflösbaren Gruppe C ist, so ergibt Satz 1 (für $\pi = \{p\}$), daß $P = A_p B_p = B_p C_p = C_p A_p$ in G normal ist. Wäre nun die Frattini-Gruppe $\Phi(P) \neq 1$, so wäre $G/\Phi(P)$ überauflösbar, und aus BAER ([1], Theorem 4.1) würde folgen, daß G doch überauflösbar ist. Also ist $\Phi(P) = 1$, und P ist elementar abelsch. — Wäre nun $P \neq M$, so wäre $M \subset P$, also gäbe es nach dem Satz von MASCHKE in P ein unter G invariantes Komplement zu M . Die Existenz eines solchen Normalteilers widerspricht aber a).

c) Es gilt $A_p \neq 1 \neq B_p$ und $A_p \cap B_p = 1$.

Da die elementar abelschen Gruppen A_p und B_p im Zentrum der nilpotenten Gruppe A bzw. B liegen, liegt jedes Element von $A_p \cap B_p$ im Zentrum von

$G=AB$, erzeugt also einen zyklischen Normalteiler von G . Wegen a) ist daher $A_p \cap B_p = 1$. — Ist nun etwa $A_p = 1$, so ist $M = B_p = C_p$. Sei Z ein minimaler p -Normalteiler der überauflösbaren Gruppe C , dann ist Z zyklisch und wird von B zentralisiert. Wegen $G=BC$ ist also Z ein zyklischer Normalteiler von G , was wegen a) nicht geht.

d) Es gilt $|M|=p^2$, $|A|=|B|=p$.

Nach dem Satz von MASCHKE gibt es in M ein Komplement K zu A_p , das unter A invariant ist. Es gibt daher eine unter A invariante Untergruppe T von M , die K enthält und $|M:T|=p$ erfüllt. Ist $|B_p| \geq p^2$, so ist $D = T \cap B_p \neq 1$. Da $G=BA$, so ist der kleinste Normalteiler von G , der D enthält, von der Menge $D^G = D^A$ erzeugt, liegt also in T . Dies widerspricht jedoch der Minimalität von M . Also gilt $|B_p|=p$. Ebenso erhält man $|A_p|=p$. — Wegen $M=A_p B_p$ gilt $|M|=p^2$.

e) A und B sind zyklisch.

Da M der einzige minimale Normalteiler von G ist und gleichzeitig eine Sylow-Gruppe, so ist M sein eigener Zentralisator in G . Es gilt $A_p \neq A$, da sonst B_p im Zentrum von $G=AB$ liegt im Widerspruch zu a). Aber dann ist A_p die Menge der Elemente von M , die unter A festbleiben. Auf dem unter A invarianten Komplement K zu A_p von M hat also kein Element $\neq 1$ des p -Komplements A^p von A einen Fixpunkt. Da K zyklisch ist, ist auch A^p zyklisch. A ist das direkte Produkt der zyklischen Gruppen A^p und A_p teilerfremder Ordnung und daher zyklisch. — Dasselbe Argument ergibt, daß auch B zyklisch ist.

Unser minimales Gegenbeispiel $G=AB$ ist also ein Produkt zweier zyklischer Gruppen. Nach HUPPERT ([3], Satz 24a) enthält wenigstens einer der beiden Faktoren eines solchen Produkts einen nicht-trivialen Normalteiler von G , der natürlich auch zyklisch ist. Dies widerspricht der Aussage a). — Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches Gegenbeispiel geben kann. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 3. Die endliche Gruppe G besitzt genau dann eine normale, überauflösbare π -Hall-Gruppe für die Primzahlmenge π , wenn es in G Untergruppen A und B mit normalen, nilpotenten π -Hall-Gruppen und eine Untergruppe C mit normaler, überauflösbarer π -Hall-Gruppe gibt, so daß

$$G = AB = BC = CA$$

gilt. — Sind die nilpotenten π -Hall-Gruppen von A und B direkte Faktoren von A und B , und ist die normale π -Hall-Gruppe von C überauflösbar in C eingebettet, dann ist die normale π -Hall-Gruppe von G überauflösbar in G eingebettet.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die zweite Aussage von Folgerung 3 nicht notwendig, sondern nur hinreichend ist.

Beweis. Daß die Bedingung in der ersten Aussage hinreichend ist, folgt direkt aus Folgerung 1 und Satz 2. Das Hinreichen der Bedingung in der

zweiten Aussage ergibt sich nun durch im wesentlichen das gleiche Argument, das Satz 2 bewies.

Sei also nun H die normale, überauflösbare π -Hall-Gruppe von G . Nach dem Satz von SCHUR-ZASSENHAUS gibt es ein Komplement K zu H in G . Wir wählen $A=KH'$, $B=\mathfrak{N}_G S$, wobei S ein Normalisator eines Sylow-Systems von H ist, und $C=G$. Daß dann $G=AB=BC=CA$ gilt, ist klar; und damit ist auch die Notwendigkeit der Bedingung in der ersten Aussage nachgewiesen.

Häufig gibt Satz 3 aus [5] viel mehr als nur die Nicht-Einfachheit einer Gruppe. Der Satz besagt: Gibt es in der endlichen Gruppe $G=S_0$ nicht-triviale Untergruppen A und B , die $AB^g=B^gA$ für jedes $g \in G$ sowie $AB \neq G$ erfüllen, dann gibt es einen echten Normalteiler S_1 von G , der A oder B enthält. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt dann, daß $A \cap S_1$ mit allen in G zu $B \cap S_1$ konjugierten Untergruppen vertauschbar ist. Ist nun $A \cap S_1 \neq 1 \neq B \cap S_1$ und gilt außerdem $(A \cap S_1)(B \cap S_1) \neq S_1$, so kann man wiederum Satz 3 aus [5] auf S_1 anwenden. So kommt man schließlich zu einem Subnormalteiler S_n , $n \geq 0$, in dem die Voraussetzungen von Satz 3 aus [5] erfüllt sind, aber für keinen echten Normalteiler S_{n+1} von S_n , der $A \cap S_n$ oder $B \cap S_n$ enthält, sind diese Voraussetzungen erfüllt, d.h. entweder gilt $(A \cap S_{n+1})(B \cap S_{n+1}) = S_{n+1}$, oder aber $A \cap S_{n+1} = 1$ bzw. $B \cap S_{n+1} = 1$. Sei nun etwa $S_{n+1} \neq (A \cap S_{n+1})(B \cap S_{n+1})$, aber $A \cap S_{n+1} = 1$; dann enthält S_{n+1} die Untergruppe $B \cap S_n = B \cap S_{n+1}$. Die Untergruppe $U = (A \cap S_n)(B \cap S_n)$ von S_n trifft den Normalteiler S_{n+1} genau in der Untergruppe $B \cap S_n$; dann normalisiert aber $A \cap S_n$ jede in S_n zu $B \cap S_n = U \cap S_{n+1}$ konjugierte Untergruppe. Erzeugen die Konjugierten von $A \cap S_n$ in S_n die Gruppe S_n , dann ist die Untergruppe $B \cap S_n$ normal in S_n , also subnormal in G ; andernfalls gibt es einen echten Normalteiler T_{n+1} von S_n , der $A \cap S_n$ enthält und für den entweder $B \cap T_{n+1} = 1$ oder $T_{n+1} = (A \cap S_n)(B \cap T_{n+1})$ gilt. — Wir fassen das zusammen als

Lemma. *Gibt es in der endlichen Gruppe G nicht-triviale Untergruppen A, B , die $AB^g=B^gA$ für alle $g \in G$ und $AB \neq G$ erfüllen, dann gibt es einen Subnormalteiler R von G derart, daß $A \cap R \neq 1 \neq B \cap R$ und $A \cap R$ mit jeder in R zu $B \cap R$ konjugierten Untergruppe vertauschbar aber $R \neq (A \cap R)(B \cap R)$ ist, aber für keinen echten Normalteiler S von R , der $A \cap R$ oder $B \cap R$ enthält, sind die Voraussetzungen von Satz 3 aus [5] erfüllt. — Gilt für solch ein S etwa $S \neq (A \cap S)(B \cap S)$ und $A \cap S = 1$, dann ist entweder $B \cap S$ normal in R , oder es gibt einen echten Normalteiler T von R , der $A \cap R$ enthält und entweder $B \cap T = 1$ oder $T = (A \cap T)(B \cap T)$ erfüllt.*

Ist in der eben beschriebenen Situation die Untergruppe $H=AB$ eine π -Hall-Gruppe von G , dann ist für jeden auf die eben beschriebene Weise gewählten Subnormalteiler S von G die π -Hall-Gruppe $H \cap S$ von S faktorisiert als $H \cap S = (A \cap S)(B \cap S)$. — Einen Fall, der uns nützlich sein wird, formulieren wir als

Hilfssatz 3. *Gibt es in der endlichen Gruppe G keinen π -Normalteiler $\neq 1$, und gibt es in G ein Paar A, B nicht-trivialer Untergruppen, so daß $AB^g=B^gA$ für jedes $g \in G$ gilt und AB eine π -Hall-Gruppe von G ist, dann gibt es in G Subnormalteiler S und T mit $B \cap S$ bzw. $A \cap T$ als π -Hall-Gruppen $\neq 1$ und $A \cap S = B \cap T = 1$.*

Als Beitrag in Richtung auf die in der Einleitung aufgestellte Vermutung beweisen wir nun den dort schon angekündigten recht speziellen

Satz 3. *Ist σ eine (partielle) Anordnung der Menge aller Primzahlen, so ist die endliche Gruppe G der Form $G=AB=BC=CA$ auflösbar, wenn die Untergruppen A und B σ -verstreut sind und C auflösbar ist.*

Beweis. Angenommen, der Satz sei falsch und G ist ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. G ist nicht auflösbar, und jedes echte homomorphe Bild von G ist auflösbar.

a) G hat einen einzigen minimalen Normalteiler $M \neq 1$, M ist nicht-abelsch und enthält jeden minimalen Subnormalteiler von G . Der Zentralisator von M in G ist 1.

Hätte G einen zweiten minimalen Normalteiler N , so ließe sich G isomorph in die auflösbare Gruppe $G/M \times G/N$ einbetten, was nicht geht. Da G nicht auflösbar ist, G/M aber auflösbar ist, so ist M direktes Produkt isomorpher, nicht-abelscher einfacher Gruppen. Der Zentralisator $\mathfrak{C}_G M$ erfüllt daher $M \cap \mathfrak{C}_G M = 1$. Der Einzigkeit von M wegen gilt $\mathfrak{C}_G M = 1$. — Liegt ein minimaler Subnormalteiler von G nicht in M , so ist er auflösbar und zentralisiert daher M . Wegen $\mathfrak{C}_G M = 1$ kann es aber solche Subnormalteiler von G nicht geben.

b) Ist p ein σ -maximaler Primteiler von $|G|$, so gilt $p \mid (|A|, |B|)$.

Ist etwa $A_p = 1$, dann ist $B_p = C_p$ eine p -Sylow-Gruppe von G . Da B_p in B normal ist, so liegt der kleinste Normalteiler von $G=BC$, der B_p enthält, in C und ist daher auflösbar. Das widerspricht a).

c) Ist π eine Menge von Primzahlen, so daß A und B beide π -abgeschlossen sind und π wenigstens einen σ -maximalen Primteiler von $|G|$ und genau einen Primteiler q von $|M|$ enthält, dann treffen A_π und B_π je wenigstens einen der einfachen direkten Faktoren von M in einer q -Sylow-Gruppe. — Die Gruppe G erfüllt D_π und die π -Hall-Gruppen von G sind auflösbar.

Da G/M auflösbar ist und da eine π -Hall-Gruppe von M nach Voraussetzung eine q -Sylow-Gruppe von M ist, so sind nach P. HALL ([2], Theorem D5) die π -Hall-Gruppen von G auflösbar und in G ist die Bedingung D_π erfüllt. Dann ergibt aber Hilfssatz 2, daß die π -Hall-Gruppe A_π von A mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist, die zu der π -Hall-Gruppe B_π von B konjugiert ist. Wegen b) gilt $A_\pi \neq 1 \neq B_\pi$, und Anwendung von Hilfssatz 3 ergibt den Rest von c) wegen a).

d) Ist π die Primzahlmenge aus c), dann gibt es einfache direkte Faktoren von M , die eine q -Sylow-Gruppe in A_π und eine q -Sylow-Gruppe in B_π haben.

Sei K das direkte Produkt derjenigen einfachen direkten Faktoren von M , die eine q -Sylow-Gruppe in A_π haben. Nach c) ist $K \neq 1$. K und das normale Komplement L von K in M sind unter A invariant. Angenommen, alle diejenigen einfachen Faktoren, die eine q -Sylow-Gruppe in B_π haben, liegen bereits in L . Ihr Produkt ist $\neq 1$ [nach c)] und invariant unter B . Der kleinste Normalteiler von $G=BA$, der dies Produkt enthält, liegt daher in L . Dies widerspricht der Minimalität von M .

e) Es kann keine solche Primzahlmenge π geben, wie sie in c) beschrieben ist.

Sei — wie unter d) — K das Produkt derjenigen einfachen direkten Faktoren von M , die eine q -Sylow-Gruppe in A_π haben, dann ist A_π eine π -Hall-Gruppe von KA_π und $\bar{B} = B_\pi \cap KA_\pi \cong B_\pi \cap K \neq 1$. Nach dem Dedekindschen Modulsatz ist A_π mit jeder in KA_π zu $\bar{B}$ konjugierten Untergruppe vertauschbar. Da A_π eine π -Hall-Gruppe von KA_π ist, so gilt $\bar{B} \subseteq A_\pi$. Nach Satz 2 aus WIELANDT [9] gibt es also einen $\bar{B}$ enthaltenden Subnormalteiler S von KA_π , der eine π -Gruppe ist und daher auflösbar. Der auflösbare Subnormalteiler S zentralisiert aber M , was a) widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, daß es keine solche Primzahlmenge π geben kann.

Ist nun q ein σ -maximaler Primteiler von $|M|$, dann hat die Menge π , die aus all den Primteilern von G besteht, die (im Sinne von σ) größer oder gleich q sind, genau die in c) beschriebenen Eigenschaften. Da es nach e) keine solchen Mengen geben kann, hat auch $|M|$ keinen σ -maximalen Primteiler. Dann hat aber $|M|$ gar keinen Primteiler, d.h. $M = 1$ im Widerspruch zu a). — Dieser Widerspruch zeigt, daß es kein solches Gegenbeispiel geben kann. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Es ist merkwürdig, daß von der Existenz und Struktur von C nur an einer einzigen Stelle — in b) — in diesem Beweis Gebrauch gemacht wurde.

Literatur

- [1] BAER, R.: Supersoluble Immersion. Canadian J. Math. **11**, 353—369 (1959).
- [2] HALL, P.: Theorems like Sylow's. Proc. London Math. Soc. (3) **6**, 286—304 (1956).
- [3] HUPPERT, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953).
- [4] — Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1954).
- [5] KEGEL, O. H.: Produkte nilpotenter Gruppen. Arch. Math. **12**, 90—93 (1961).
- [6] SZÉP, J.: Bemerkung zu einem Satz von ORE. Publ. Math. Debrecen **3**, 81—82 (1953).
- [7] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).
- [8] — Über die Normalstruktur mehrfach faktorisierter Gruppen. J. Australian Math. Soc. **1**, 143—146 (1959).
- [9] — Subnormale Hüllen in Permutationsgruppen. Math. Z. **79**, 381—388 (1962).

Frankfurt, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 26. Mai 1964)